ANNÉE 2025 - SUJET 2

AMÉRIQUE DU NORD - 22 MAI 2025

Exercice 1

Énoncé **(5 points)**

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

L'entraineur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entraînement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de 0,32.

Lors d'un entrainement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.
3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N.
5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués après cette série de lancers.
   (a) Exprimer T en fonction de N.
   (b) En déduire l'espérance de la variable aléatoire T. Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.
   (c) Calculer $P(12 \leqslant T \leqslant 18)$.

PARTIE B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un matche.

On admet que l'espérance $E(X) = 22$ et la variance $V(X) = 65$.

Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif.

On note X_1, X_2, ..., X_n les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1^{er}, 2^{e}, ..., n-ième matchs. On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X.

On pose $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.
   (a) Que représente la variable aléatoire M_{50} ?

(b) Déterminer l'espérance et la variance de M_{50}.

(c) Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{13}{90}$.

(d) En déduire que la probabilité de l'événement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à 0,85.

2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geqslant 3) < 0{,}01$ ».

Exercice 2

Énoncé **(5 points)**

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel $\ln(2)$, en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au 16^{e} siècle.
On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}.$$

PARTIE A

1.(a) Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2.

(b) Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.

2.(a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

(c) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.

(d) Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

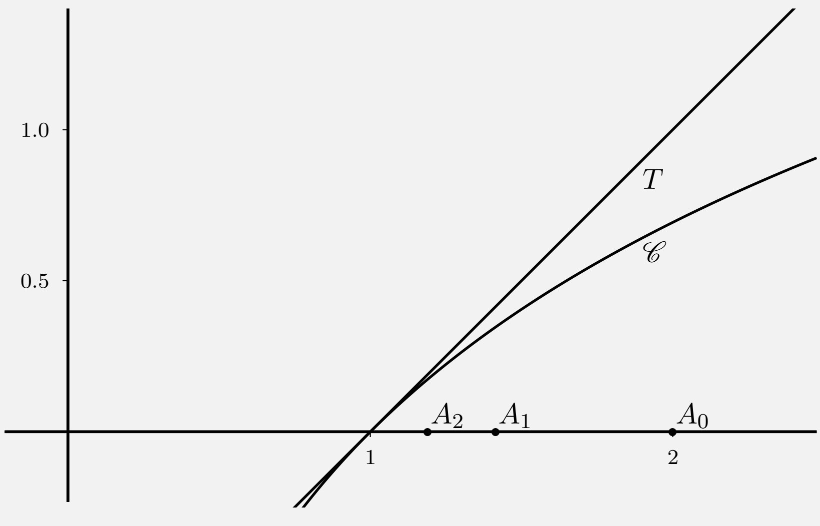
On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1.(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

(b) Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln et la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
Une équation de la droite T est $y = x - 1$.
Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



On décide de prendre $x-1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\,;\,1{,}01[$.

(a) Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0{,}99\,;\,1{,}01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.

(b) En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.

(c) Déduire des questions 1.c. et 2.b. de la partie B une approximation de $\ln(2)$.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de $\ln(a)$.
On rappelle que l'instruction en langage Python sqrt(a) correspond à $\sqrt{a}$.

```
from math import*
def Briggs(a) :
   n = 0
   while a >= 1.01 :
      a = sqrt(a)
      n = n+1
   L = ......
   return L
```

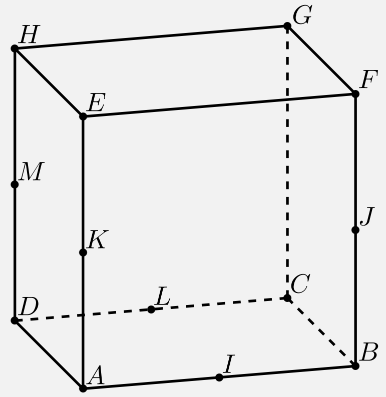
Exercice 3

Énoncé **(5 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

PARTIE A

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête de longueur 1. Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BF]$, $[AE]$, $[CD]$ et $[DH]$.



Affirmation 1 : « $\overrightarrow{JH} = 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{CB}$ »

Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AG})$ est une base de l'espace. »

Affirmation 3 : « $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{LM} = -\dfrac{1}{4}$ »

PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$
- les points $A(2\,;\,0\,;\,-1)$ et $B(5\,;\,-3\,;\,7)$

Affirmation 4 : « Le plan $\mathscr{P}$ et la droite (AB) sont parallèles. »

Affirmation 5 : « Le plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ passant par B a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$ »

Affirmation 6 : « La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est égale à $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. »

On note (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases} \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

Exercice 4

Énoncé **(5 points)**

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1.(a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, $f'(x) = \mathrm{e}^x\left(\sin(x) + \cos(x)\right)$.

(b) Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2.(a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

(b) Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(c) En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^x \sin(x) \geqslant x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes : $I = 1 + J$ et $I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J$.
2. En déduire que $I = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.
3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.
   Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
   Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$.