

**Exercice 1****Énoncé****(6 points)**

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25 % des connexions transitent via le serveur A ;
- 15 % des connexions transitent via le serveur B ;
- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

- 90 % des connexions via le serveur A sont stables ;
- 80 % des connexions via le serveur B sont stables ;
- 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

*Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.*

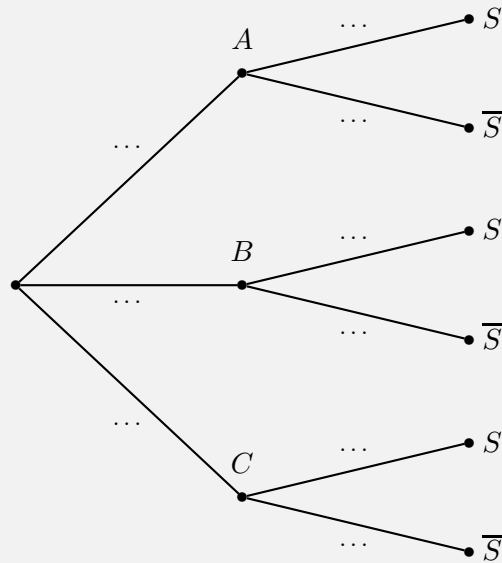
**Partie A**

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les événements :

- $A$  : « La connexion s'est effectuée via le serveur A » ;
- $B$  : « La connexion s'est effectuée via le serveur B » ;
- $C$  : « La connexion s'est effectuée via le serveur C » ;
- $S$  : « La connexion est stable ».

On note  $\bar{S}$  l'événement contraire de l'événement  $S$ .

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0,12.
3. Calculer la probabilité  $P(C \cap \overline{S})$  et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Démontrer que la probabilité de l'événement  $S$  est  $P(S) = 0,855$ .
5. On suppose désormais que la connexion est stable. Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B. *On donnera la valeur arrondie au millièème.*

### Partie B

D'après la **Partie A**, la probabilité qu'une connexion soit **instable** est égale à 0,145.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.  
On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.
  - (a) On admet que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
  - (b) Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. *On donnera la valeur arrondie au millièème.*
2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de  $n$  connexions, toujours dans les mêmes conditions, où  $n$  désigne un entier naturel strictement positif. On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables et on admet que  $X_n$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et 0,145.
  - (a) Donner l'expression en fonction de  $n$  de la probabilité  $p_n$  qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.
  - (b) Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel  $n$  telle que la probabilité  $p_n$  est supérieure ou égale à 0,99.
3. On s'intéresse à la variable aléatoire  $F_n$  égale à la fréquence de connexions instables dans un échantillon de  $n$  connexions, où  $n$  désigne un entier naturel strictement positif. On a donc  $F_n = \frac{X_n}{n}$ , où  $X_n$  est la variable aléatoire définie à la question 2.
  - (a) Calculer l'espérance  $E(F_n)$ .  
On admet que  $V(F_n) = \frac{0,123975}{n}$ .

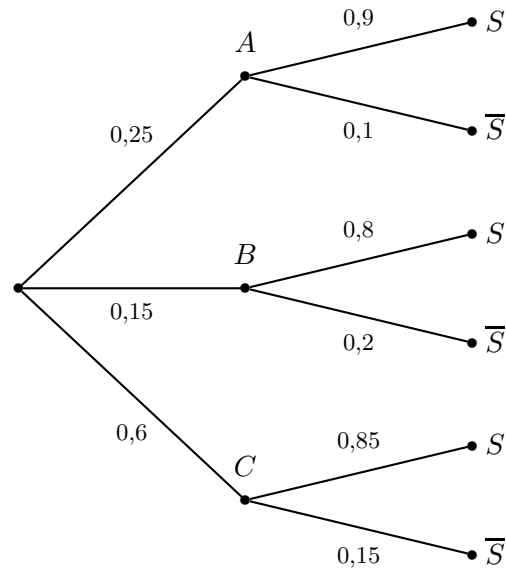
(b) Vérifier que  $P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,5}{n}$ .

(c) Un responsable de l'entreprise étudie un échantillon de 1000 connexions et constate que pour cet échantillon  $F_{1000} = 0,3$ . Il soupçonne un dysfonctionnement des serveurs. A-t-il raison ?

## Correction

### Partie A

1. On obtient l'arbre :



2. Il s'agit de calculer  $P(B \cap S)$  :

$$P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S) = 0,15 \times 0,8 = 0,12$$

La probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est donc :

$$\boxed{P(B \cap S) = 0,12}$$

3. On a :

$$P(C \cap \overline{S}) = P(C) \times P_C(\overline{S}) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$$

La probabilité que la connexion passe par le serveur C et soit instable est donc :

$$\boxed{P(C \cap \overline{S}) = 0,09}$$

4. Les événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) + P(C) \times P_C(S) \\ &= 0,25 \times 0,9 + 0,15 \times 0,8 + 0,6 \times 0,85 \\ &= 0,855 \end{aligned}$$

La probabilité que la connexion soit stable est donc :

$$\boxed{P(S) = 0,855}$$

5. Il s'agit de calculer  $P_S(B)$  :

$$P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0,12}{0,855} \approx 0,140$$

La probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B sachant que la connexion est stable est donc :

$$\boxed{P_S(B) \approx 0,140}$$

## Partie B

1.(a) On répète 50 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à 0,145. La variable aléatoire  $X$  compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 50 \text{ et } p = 0,145}$$

(b) Il s'agit de calculer  $P(X \leq 8)$ . On obtient, à l'aide de la calculatrice que la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est :

$$\boxed{P(X \leq 8) \approx 0,704}$$

2.(a) Il s'agit de déterminer  $P(X_n \geq 1)$ . On a  $P(X_n = 0) = (1 - 0,145)^n = 0,855^n$  et, en passant à l'événement contraire, on obtient :

$$P(X_n \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,855^n$$

La probabilité  $p_n$  qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable est donc :

$$\boxed{p_n = 1 - 0,855^n}$$

(b) Il s'agit de résoudre l'inéquation  $p_n \geq 0,99$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} p_n \geq 0,99 &\iff 1 - 0,855^n \geq 0,99 \\ &\iff 0,855^n \leq 0,01 \\ &\iff \ln(0,855^n) \leq \ln(0,01) \\ &\iff n \ln(0,855) \leq \ln(0,01) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \quad (\text{car } \ln(0,855) < 0) \end{aligned}$$

Or  $\frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \approx 29,4$  donc la plus petite valeur de l'entier naturel  $n$  telle que la probabilité  $p_n$  est supérieure ou égale à 0,99 est :

$$\boxed{n = 30}$$

3.(a) La variable aléatoire  $X_n$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = 0,145$ , son espérance est donc :

$$E(X_n) = n \times p = 0,145n$$

Et, par linéarité de l'espérance :

$$E\left(\frac{X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{1}{n} \times 0,145n = 0,145$$

Soit :

$$\boxed{E(F_n) = 0,145}$$

(b) En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire  $F_n$ , on obtient :

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq 0,1) \leq \frac{V(F_n)}{0,1^2}$$

Soit :

$$P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{0,123975}{n \times 0,01}$$

D'où :

$$P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,3975}{n}$$

Et a fortiori :

$$P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,5}{n}$$

(c) D'après la question précédente, en prenant  $n = 1\,000$ , on a :

$$P(|F_{1\,000} - 0,145| \geq 0,1) \leq 0,0125$$

Ou encore, en passant à l'événement contraire :

$$P(0,045 < F_{1\,000} < 0,245) \geq 0,9875$$

Cela signifie qu'en fonctionnement normal, il y a plus de 98,75 % de chances pour que  $F_{1\,000}$  soit compris entre 0,045 et 0,245. Or 0,3 est en dehors de cet intervalle donc on en déduit que :

Le responsable a raison de soupçonner un dysfonctionnement

## Exercice 2

### Énoncé

(5 points)

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par son premier terme  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite  $(u_n)$  est bien définie.

1. Calculer le terme  $u_1$ .
2. On définit la suite  $(a_n)$  pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite  $(a_n)$  est bien définie.

- (a) Calculer  $a_0$  et  $a_1$ .
- (b) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = 3a_n - 1$ .
- (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,  $a_n \geq 3n - 1$ .
- (d) En déduire la limite de la suite  $(a_n)$ .
3. On souhaite étudier la limite de la suite  $(u_n)$ .
  - (a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$ .
  - (b) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .
4. On admet que la suite  $(u_n)$  est décroissante.  
On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def algo(p) :
    u = 2
    n = 0
    while u-1 > p :
        u = (2*u+1)/(u+2)
        n = n+1
    return (n,u)
```

- (a) Interpréter les valeurs  $n$  et  $u$  renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.
- (b) Donner, sans justifier, la valeur de  $n$  pour  $p = 0,001$ .

### Correction

1. On a :

$$u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{2 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{5}{4}$$

Soit :

$$\boxed{u_1 = \frac{5}{4}}$$

2.(a) On a :

$$a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{2}{2 - 1} = 2 \quad \text{et} \quad a_1 = \frac{u_1}{u_1 - 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 5$$

Soit :

$$\boxed{a_0 = 2} \quad \text{et} \quad \boxed{a_1 = 5}$$

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a d'une part :

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2}} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{u_n - 1}{u_n + 2}} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{u_n - 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$$

Et d'autre part :

$$3a_n - 1 = \frac{3u_n}{u_n - 1} - 1 = \frac{3u_n}{u_n - 1} - \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = \frac{3u_n - u_n + 1}{u_n - 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$$

On a donc bien :

$$\boxed{a_{n+1} = 3a_n - 1}$$

(c) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n \geq 3n - 1$ .

• **Initialisation :**

Pour  $n = 1$ , on a  $a_1 = 5$  et  $3 \times 1 - 1 = 2$ , on a donc bien  $a_1 \geq 3 \times 1 - 1$ . La propriété est vraie au rang  $n = 1$ .

• **Hérédité :**

Supposons la propriété vraie pour un certain rang  $n \in \mathbb{N}^*$ , c'est-à-dire que  $a_n \geq 3n - 1$ . On a alors :

$$3a_n \geq 9n - 3$$

Puis :

$$3a_n - 1 \geq 9n - 4$$

Or :

$$9n - 4 \geq 3(n + 1) - 1 \iff 9n - 4 \geq 3n + 2 \iff 6n \geq 6 \iff n \geq 1$$

On a donc, pour tout  $n \geq 1$ ,  $9n - 4 \geq 3(n + 1) - 1$  et donc :

$$a_{n+1} \geq 3(n + 1) - 1$$

La propriété est donc vraie au rang  $n + 1$ .

• **Conclusion :**

La propriété est vraie pour  $n = 1$  et elle est héréditaire à partir de  $n = 1$ , elle est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (d) D'après la question précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $a_n \geq 3n - 1$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - 1) = +\infty$  donc, d'après le théorème de minoration :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty}$$

- 3.(a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} a_n = \frac{u_n}{u_n - 1} &\iff a_n(u_n - 1) = u_n \\ &\iff a_n u_n - a_n = u_n \\ &\iff a_n u_n - u_n = a_n \\ &\iff u_n(a_n - 1) = a_n \\ &\iff u_n = \frac{a_n}{a_n - 1} \quad (\text{car } a_n \neq 1) \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}}$$

- (b) On peut alors écrire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n = \frac{a_n - 1 + 1}{a_n - 1} = \frac{a_n - 1}{a_n - 1} + \frac{1}{a_n - 1} = 1 + \frac{1}{a_n - 1}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{a_n - 1} \right) = 0$  donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$

- 4.(a) La valeur de  $n$  est le plus petit entier tel que  $u_n - 1 \leq p$ , c'est-à-dire le rang à partir duquel l'écart entre la suite et sa limite 1 est inférieure à  $p$ . Et la valeur de  $u$  est le terme de la suite correspondant.

- (b) Pour  $p = 0,001$ , on obtient :

$$\boxed{n = 6}$$

### Exercice 3

#### Énoncé

(4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la droite  $(d)$  dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

On considère également les points suivants :

- $A(3; -3; -2)$
- $B(5; -4; -1)$
- $C$  le point de la droite  $(d)$  d'abscisse 2
- $H$  le projeté orthogonal du point  $B$  sur le plan  $\mathcal{P}$  d'équation  $x + 3z - 7 = 0$

#### Affirmation 1

La droite  $(d)$  et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

#### Affirmation 2

Le plan passant par  $A$  et orthogonal à la droite  $(d)$  a pour équation cartésienne :

$$x + 3z + 3 = 0$$

#### Affirmation 3

Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$  est  $\frac{\pi}{6}$ .

#### Affirmation 4

La distance  $BH$  est égale à  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ .

### Correction

#### • Affirmation 1 : Vrai

D'après sa représentation paramétrique, la droite  $(d)$  est dirigée par le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ . L'axe

des ordonnées est dirigé par le vecteur  $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{j}$  ne sont pas colinéaires donc

les droites ne sont pas parallèles. Étudions alors leur intersection. L'axe des ordonnées admet la

représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$  avec  $t \in \mathbb{R}$ , on a alors :

$$\begin{cases} 3 - 2t = 0 \\ -1 = t \\ 2 - 6t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = -1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ce système n'admet aucune solution donc les deux droites ne sont pas sécantes.

Finalement les droites ne sont ni sécantes ni parallèles, on en déduit qu'elles ne sont pas coplanaires.

• **Affirmation 2 : Vrai**

Le plan d'équation  $x + 3z + 3 = 0$  admet le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  pour vecteur normal et ce vecteur est

colinéaire au vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$  qui dirige la droite  $(d)$ . Ce plan est donc bien orthogonal à la droite  $(d)$ . De plus les coordonnées du point  $A$  vérifient son équation, en effet  $3 + 3 \times (-2) + 3 = 3 - 6 + 3 = 0$ . Il s'agit donc bien du plan passant par  $A$  et orthogonal à la droite  $(d)$ .

• **Affirmation 3 : Faux**

Le point  $C$  étant le point de la droite  $(d)$  d'abscisse 2, c'est le point de paramètre  $t = \frac{1}{2}$ , soit  $C(2; -1; -1)$ . Exprimons alors de deux façons le produit scalaire  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ . On a  $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- D'une part, on a :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -3$$

- D'autre part  $\|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$  et  $\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$  et donc :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos(\widehat{BAC}) = 6 \cos(\widehat{BAC})$$

On en déduit l'égalité  $6 \cos(\widehat{BAC}) = -3$  et donc  $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{1}{2}$ . Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$  est donc  $\frac{2\pi}{3}$ .

• **Affirmation 4 : Vrai**

La droite  $\Delta$  passant par  $B$  orthogonalement à  $\mathcal{P}$  admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -4 \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Déterminons alors les coordonnées de  $H$ , point d'intersection de  $\Delta$  et  $\mathcal{P}$ . On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de  $\Delta$  dans l'équation cartésienne de  $\mathcal{P}$  :

$$5 + t + 3(-1 + 3t) - 7 = 0 \iff 5 + t - 3 + 9t - 7 = 0 \iff 10t = 5 \iff t = \frac{1}{2}$$

On a donc :

$$H \left( \frac{11}{2}; -4; \frac{1}{2} \right)$$

Et finalement :

$$BH = \sqrt{\left(\frac{11}{2} - 5\right)^2 + (-4 + 4)^2 + \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

## Exercice 4

### Énoncé

(5 points)

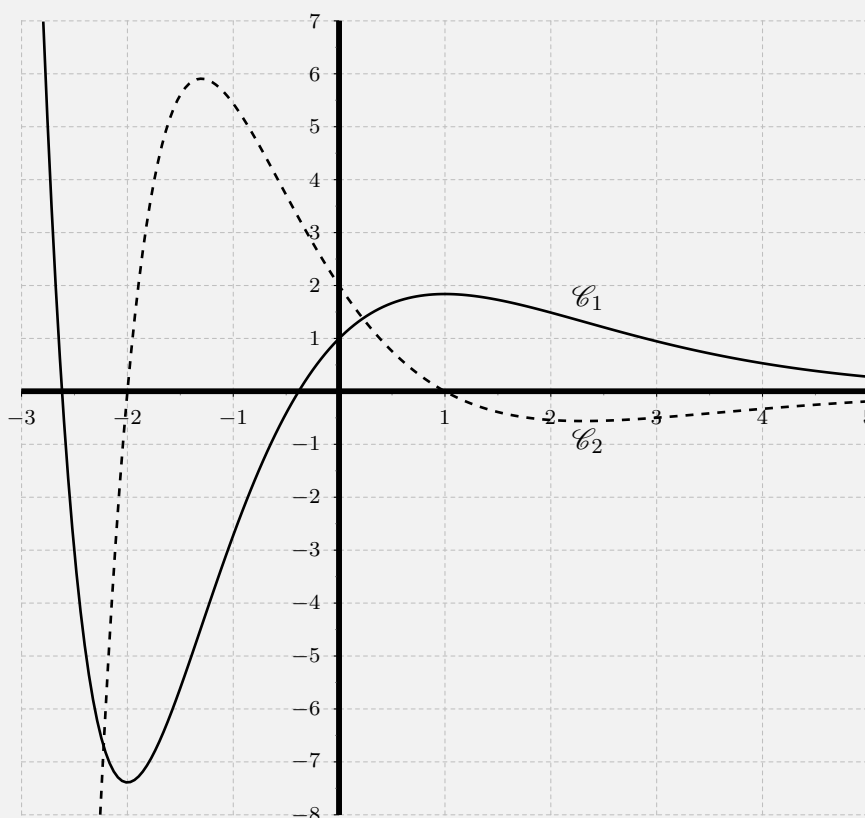
La partie C est indépendante des parties A et B.

### Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$ . L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera  $g$  et  $g'$ .

On précise également que :

- La courbe  $\mathcal{C}_1$  coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées  $(0; 1)$ .
- La courbe  $\mathcal{C}_2$  coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées  $(0; 2)$  et l'axe des abscisses aux points de coordonnées  $(-2; 0)$  et  $(1; 0)$ .



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions  $g$  et  $g'$  sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $g$  au point d'abscisse 0 est  $y = 2x + 1$ .

### Partie B

On considère  $(E)$  l'équation différentielle  $y + y' = (2x + 3)e^{-x}$ , où  $y$  est une fonction de la variable  $x$ .

1. Montrer que la fonction  $f_0$  définie pour tout nombre réel  $x$  par  $f_0(x) = (x^2 + 3x)e^{-x}$  est une solution particulière de l'équation différentielle  $(E)$ .
2. Résoudre l'équation différentielle  $(E_0) : y + y' = 0$ .
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle  $(E)$ .
4. On admet que la fonction  $g$  décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle  $(E)$ . Déterminer alors l'expression de la fonction  $g$ .

5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle  $(E)$  dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

### Partie C

On considère la fonction  $f$  définie pour tout nombre réel  $x$  par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$$

- Démontrer que la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$  est égale à 0.  
On admet par ailleurs que la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  est égale à  $+\infty$ .
- On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - Vérifier que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$ .
  - Déterminer le signe de la fonction dérivée  $f'$  sur  $\mathbb{R}$  puis en déduire les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Expliquer pourquoi la fonction  $f$  est positive sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- On notera  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
On admet que la fonction  $F$  définie pour tout nombre réel  $x$  par  $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)e^{-x}$  est une primitive de la fonction  $f$ .  
Soit  $\alpha$  un nombre réel positif.  
Déterminer l'aire  $\mathcal{A}(\alpha)$ , exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}_f$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = \alpha$ .

### Correction

#### Partie A

- Notons  $f_1$  la fonction représentée par la courbe  $\mathcal{C}_1$  et  $f_2$  la fonction représentée par la courbe  $\mathcal{C}_2$ .  
On peut remarquer que :
  - Sur l'intervalle  $]-\infty; -2]$ , la fonction  $f_2$  est négative et la fonction  $f_1$  est décroissante.
  - Sur l'intervalle  $[-2; 1]$ , la fonction  $f_2$  est positive et la fonction  $f_1$  est croissante.
  - Sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ , la fonction  $f_2$  est négative et la fonction  $f_1$  est décroissante.

On en déduit que :

$$g \text{ est représentée par } \mathcal{C}_1 \text{ et } g' \text{ par } \mathcal{C}_2$$

- On sait que  $g(0) = 1$  et  $g'(0) = 2$ . La tangente à la courbe représentative de la fonction  $g$  au point d'abscisse 0 est donc  $y = 2(x - 0) + 1$  soit :

$$y = 2x + 1$$

#### Partie B

- La fonction  $f_0$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'_0(x) = (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x) \times (-e^{-x}) = (-x^2 - x + 3)e^{-x}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} f_0(x) + f'_0(x) &= (x^2 + 3x)e^{-x} + (-x^2 - x + 3)e^{-x} \\ &= (x^2 + 3x - x^2 - x + 3)e^{-x} \\ &= (2x + 3)e^{-x} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\text{La fonction } f_0 \text{ est solution de } (E)$$

2. L'équation  $(E_0)$  s'écrit  $y' = -y$ , les solutions sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{-x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Les solutions de l'équation différentielle  $(E)$  sont les fonctions qui s'écrivent comme la somme d'une solution de l'équation homogène associée  $(E_0)$  et de la fonction  $f_0$ , solution particulière de  $(E)$ , soit les fonctions de la forme :

$$x \mapsto (x^2 + 3x + \lambda)e^{-x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

4. La fonction  $g$  étant une solution de  $(E)$ , il existe un réel  $\lambda$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = (x^2 + 3x + \lambda)e^{-x}$ . De plus, on sait que  $g(0) = 1$ . On a alors :

$$\begin{aligned} g(0) = 1 &\iff \lambda e^0 = 1 \\ &\iff \lambda = 1 \end{aligned}$$

Et donc :

$$g(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$$

5. Soit  $h$  une solution de  $(E)$ , il existe donc un réel  $\lambda$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = (x^2 + 3x + \lambda)e^{-x}$ . La fonction  $h$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$h'(x) = (2x + 3 - x^2 - 3x - \lambda)e^{-x} = (-x^2 - x + 3 - \lambda)e^{-x}$$

Et :

$$h''(x) = (-2x - 1 + x^2 + x - 3 + \lambda)e^{-x} = (x^2 - x + \lambda - 4)e^{-x}$$

On a alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$h''(x) = 0 \iff x^2 - x + \lambda - 4$$

$x^2 - x + \lambda - 4$  est un polynôme du second degré qui admet pour discriminant :

$$\Delta = 1 - 4(\lambda - 4) = 1 - 4\lambda + 16 = 17 - 4\lambda$$

Et donc :

$$\Delta > 0 \iff 17 - 4\lambda > 0 \iff \lambda < \frac{17}{4}$$

Les solutions de l'équation différentielle  $(E)$  dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion sont donc les fonctions de la forme  $x \mapsto (x^2 + 3x + \lambda)e^{-x}$  avec :

$$\lambda < \frac{17}{4}$$

## Partie C

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f(x) = x^2 e^{-x} + 3x e^{-x} + 3e^{-x}$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$  par croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x e^{-x} = 0$  par croissances comparées et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{-x} = 0$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

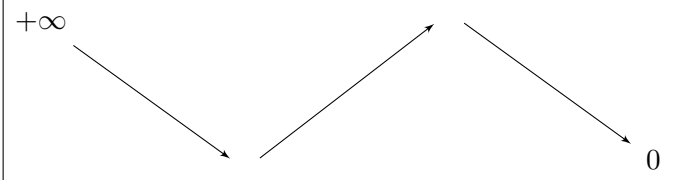
- 2.(a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x + 3)e^{-x} + (x^2 + 3x + 2) \times (-e^{-x}) \\ &= (2x + 3 - x^2 - 3x - 2)e^{-x} \\ &= (-x^2 - x + 1)e^{-x} \end{aligned}$$

Soit :

$$f'(x) = (-x^2 - x + 1)e^{-x}$$

- (b) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-x} > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $-x^2 - x + 1$ . Il s'agit d'un polynôme du second degré qui admet deux racines :  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  et  $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ . Il est négatif à l'extérieur de l'intervalle des racines d'où le tableau :

|         |           |                                                                                    |                         |           |     |     |     |
|---------|-----------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-----------|-----|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$                                                            | $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ | $+\infty$ |     |     |     |
| $f'(x)$ |           | $-$                                                                                | $0$                     | $+$       | $0$ | $-$ |     |
| $f(x)$  | $+\infty$ |  |                         |           |     |     | $0$ |

3. On a  $f(0) = 2$  puis la fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0; x_2]$  et décroissante sur l'intervalle  $[x_2; +\infty[$  avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . On en déduit que :

$f$  est positive sur l'intervalle  $[0; +\infty[$

4. La fonction  $f$  étant positive sur l'intervalle  $[0; \alpha]$ , il s'agit de calculer l'intégrale  $\int_0^\alpha f(x) dx$ .

$$\begin{aligned}
 \int_0^\alpha f(x) dx &= \left[ (-x^2 - 5x - 7)e^{-x} \right]_0^\alpha \\
 &= (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} + 7e^0 \\
 &= (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} + 7
 \end{aligned}$$

L'aire exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}_f$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = \alpha$  est donc :

$$\mathcal{A}(\alpha) = (-\alpha^2 - 5\alpha - 7)e^{-\alpha} + 7$$