Tous les sujets corrigés de spécialité mathématiques du bac 2024

36 jours pour préparer l'épreuve du baccalauréat

Fabien Vinsu

AVANT-PROPOS

Ce document regroupe l'ensemble de tous les sujets de l'épreuve de spécialité mathématiques du baccalauréat 2024. Pour chaque sujet est proposée une correction détaillée, rigoureuse et pédagogique. Chaque solution est rédigée de la façon la plus claire possible afin d'aider la lectrice ou le lecteur à assimiler les mécanismes des raisonnements.

Avant de travailler les sujets de ce recueil, il est conseillé de travailler les exercices progressifs du livre « Terminale - Spécialité Mathématiques - Incontournables, classiques, grand oral : 44 exercices progressifs corrigés et commentés » aux éditions Ellipses (ISBN 9782340087507).

Et pour optimiser les chances de réussite, on pourra également travailler avec le livre « Première - Spécialité mathématiques - Incontournables, classiques, approfondissements : 33 exercices progressifs corrigés et commentés » également aux éditions Ellipses (ISBN 9782340096981) dès l'année de première ou en guise de cahier de vacances avant l'entrée en classe de terminale.

Pour les enseignants, je mets à disposition l'ensemble des sujets corrigés de ce recueil, des diaporamas de correction ainsi que toutes les sources au format LaTeX à l'adresse suivante :

`http://specialite.mathematiques.free.fr/`

Les diaporamas sont particulièrement utiles pendant la période de révision du bac pour avancer rapidement dans la correction d'un sujet en classe.

Vous trouverez également, à la page suivante, une proposition pour travailler les 72 exercices sur 36 jours. Cette progression permet de varier les thèmes et de commencer par les exercices les plus abordables pour finir par les exercices plus difficiles.

J'ai envie de terminer cet avant-propos avec une citation du mathématicien Jean-Marie Souriau (1922-2012) :

« Les chaussures sont un instrument pour marcher, les maths sont un instrument pour penser. On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin. »

Il ne me reste plus qu'à vous souhaiter « bonne route » et, pour toute remarque, question, suggestion, correction, vous pouvez me contacter à l'adresse suivante :

specialite.mathematiques@free.fr

Fabien Vinsu

Jour 1	Exercice 9.3 page 122	Exercice 9.4 page 126
Jour 2	Exercice 12.2 page 164	Exercice 11.3 page 150
Jour 3	Exercice 10.1 page 131	Exercice 10.3 page 137
Jour 4	Exercice 8.4 page 114	Exercice 6.1 page 69
Jour 5	Exercice 1.1 page 1	Exercice 8.2 page 105
Jour 6	Exercice 2.2 page 18	Exercice 11.4 page 156
Jour 7	Exercice 2.1 page 15	Exercice 6.2 page 73
Jour 8	Exercice 1.2 page 4	Exercice 13.1 page 175
Jour 9	Exercice 17.1 page 235	Exercice 7.1 page 85
Jour 10	Exercice 10.4 page 140	Exercice 5.1 page 53
Jour 11	Exercice 18.1 page 249	Exercice 3.2 page 30
Jour 12	Exercice 11.1 page 143	Exercice 15.4 page 218
Jour 13	Exercice 13.2 page 177	Exercice 5.4 page 66
Jour 14	Exercice 7.3 page 91	Exercice 12.4 page 170
Jour 15	Exercice 5.3 page 62	Exercice 6.3 page 77
Jour 16	Exercice 5.2 page 58	Exercice 9.2 page 119
Jour 17	Exercice 15.2 page 206	Exercice 2.3 page 21
Jour 18	Exercice 16.4 page 231	Exercice 16.1 page 221
Jour 19	Exercice 4.1 page 41	Exercice 14.3 page 196
Jour 20	Exercice 3.4 page 36	Exercice 13.3 page 180
Jour 21	Exercice 3.1 page 27	Exercice 17.2 page 238
Jour 22	Exercice 14.1 page 187	Exercice 4.2 page 43
Jour 23	Exercice 8.1 page 101	Exercice 16.3 page 228
Jour 24	Exercice 9.1 page 117	Exercice 17.3 page 242
Jour 25	Exercice 16.2 page 224	Exercice 12.3 page 166
Jour 26	Exercice 4.3 page 46	Exercice 3.3 page 34
Jour 27	Exercice 7.2 page 87	Exercice 18.2 page 251
Jour 28	Exercice 13.4 page 184	Exercice 4.4 page 49
Jour 29	Exercice 11.2 page 147	Exercice 1.3 page 7
Jour 30	Exercice 6.4 page 80	Exercice 14.2 page 192
Jour 31	Exercice 14.4 page 199	Exercice 8.3 page 108
Jour 32	Exercice 17.4 page 245	Exercice 18.3 page 254
Jour 33	Exercice 12.1 page 159	Exercice 2.4 page 24
Jour 34	Exercice 15.1 page 203	Exercice 1.4 page 11
Jour 35	Exercice 10.2 page 134	Exercice 15.3 page 213
Jour 36	Exercice 18.4 page 257	Exercice 7.4 page 95

TABLE DES MATIÈRES

SUJET 1

AMÉRIQUE DU NORD - 21 MAI 2024

1.1 Des épées, des boucliers et des probabilités

Énoncé (5 points)

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.

Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

- la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;
- si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;
- si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A
Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet.
On note :

- R l'événement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'événement « le joueur tire une épée » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$ les événements contraires des événements R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. *Arrondir le résultat au millième.*

Partie B
Un joueur remporte 30 défis.

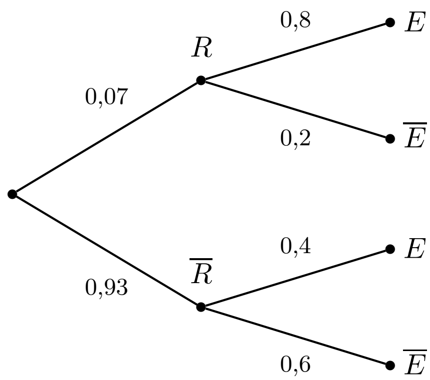
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.

2. Déterminer $P(X < 6)$. *Arrondir le résultat au millième.*
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0{,}5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %. Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0,95. Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. *On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.*

Correction
Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Et on a :

$$\begin{aligned} P(R \cap E) &= P(R) \times P_R(E) \\ &= 0{,}07 \times 0{,}8 \\ &= 0{,}056 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{P(R \cap E) = 0{,}056}$$

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers. On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(R) \times P_R(E) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(E) \\ &= 0{,}07 \times 0{,}8 + 0{,}93 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}428 \end{aligned}$$

La probabilité de tirer une épée est donc :

$$\boxed{P(E) = 0{,}428}$$

3. Il s'agit de calculer $P_E(R)$:

$$\begin{aligned} P_E(R) &= \frac{P(R \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{0{,}056}{0{,}428} \\ &\approx 0{,}131 \end{aligned}$$

La probabilité de tirer un objet rare sachant que c'est une épée est donc :

$$\boxed{P_E(R) \approx 0{,}131}$$

Partie B

1. On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est 0,07. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = 0{,}07}$$

On sait alors que son espérance est $E(X) = n \times p = 30 \times 0{,}07 = 2{,}1$, soit :

$$\boxed{E(X) = 2{,}1}$$

2. On a $P(X < 6) = P(X \leqslant 5)$ et on obtient, à l'aide de la calculatrice, $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}984$, soit :

$$\boxed{P(X < 6) \approx 0{,}984}$$

3. On a :
   - $P(X \geqslant 2) \approx 0{,}63 \geqslant 0{,}5$
   - $P(X \geqslant 3) \approx 0{,}35 < 0{,}5$

   La plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0{,}5$ est donc :

$$\boxed{k = 2}$$

Cela signifie que sur les 30 objets tirés, il y a plus de 50 % de chances d'avoir au moins 2 objets rares.

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0{,}07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}93^n$$

Il s'agit alors de résoudre une inéquation :

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}95 &\iff 1 - 0{,}93^N \geqslant 0{,}95 \\ &\iff 0{,}93^N \leqslant 0{,}05 \\ &\iff \ln\left(0{,}93^N\right) \leqslant \ln(0{,}05) \\ &\iff N \ln(0{,}93) \leqslant \ln(0{,}05) \\ &\iff N \geqslant \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}93)} \quad (\textit{car } \ln(0{,}93) < 0) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}93)} \approx 41{,}3$ donc le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre l'objectif est :

$$\boxed{N = 42}$$

Commentaires

- Dans la question 2 de la partie B, on a $P(X < 6) = P(X \leqslant 5)$ car X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale et ne peut donc prendre que des valeurs entières. Elle ne peut pas prendre de valeurs comprises strictement entre 5 et 6.
- Dans la question 4 de la partie B, pour calculer $P(Y = 0)$, on utilise la formule :

$$P(Y = 0) = \binom{N}{0} \times 0{,}07^0 \times (1 - 0{,}07)^{N-0} = 1 \times 1 \times 0{,}93^N$$

- Toujours dans la question 4 de la partie B, on aurait pu résoudre l'inéquation en tâtonnant et en disant que :

  → $1 - 0{,}93^{41} \approx 0{,}949 < 0{,}95$

  → $1 - 0{,}93^{42} \approx 0{,}953 > 0{,}95$

  C'est donc bien à partir de $N = 42$ que la probabilité dépasse 0,95.

1.2 Le QCM de l'espace

Énoncé (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les cinq questions sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$.

1. On considère les points $A(1\,;\,0\,;\,3)$ et $B(4\,;\,1\,;\,0)$.
   Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

(a) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 \\ z = -3 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

(c) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

(b) $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

(d) $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On considère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 6t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

   (a) $M(7\,;\,6\,;\,6)$
   (b) $N(3\,;\,6\,;\,4)$
   (c) $P(4\,;\,6\,;\,-2)$
   (d) $R(-3\,;\,-9\,;\,7)$

3. On considère la droite (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = -1 - 2k \\ z = 1 + k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

   Les droites (d) et (d') sont :

   (a) sécantes
   (b) non coplanaires
   (c) parallèles
   (d) confondues

4. On considère le plan (P) passant par le point $I(2\,;\,1\,;\,0)$ et perpendiculaire à la droite (d). Une équation du plan (P) est :

   (a) $2x + 3y - z - 7 = 0$
   (b) $-x + y - 4z + 1 = 0$
   (c) $4x + 6y - 2z + 9 = 0$
   (d) $2x + y + 1 = 0$

Correction

1. **Réponse (c)**

   La droite (AB) passe par le point $A(1\,;\,0\,;\,3)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

2. **Réponse (d)**

   Le point $R(-3\,;\,-9\,;\,7)$ appartient à la droite (d), il s'agit du point de paramètre $t = -\dfrac{3}{2}$.

3. **Réponse (b)**

   La droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et la droite (d') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

Déterminons alors leur intersection :

$$\begin{cases} 3+4t=-2+3k \\ 6t=-1-2k \\ 4-2t=1+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+4t=-2+3(3-2t) \\ 6t=-1-2(3-2t) \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3+4t=-2+9-6t \\ 6t=-1-6+4t \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10t=4 \\ 2t=-7 \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{2}{5} \\ t=-\dfrac{7}{2} \\ k=3-2t \end{cases}$$

Ce système n'admet aucune solution donc les droites n'ont aucun point d'intersection. Finalement les droites (d) et (d') ne sont ni parallèles ni sécantes, elles ne sont donc pas coplanaires.

4. **Réponse (a)**
Le plan (P) est perpendiculaire à la droite (d), il admet donc pour vecteur normal un vecteur directeur de la droite (d), soit par exemple le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$2x+3y-z+d=0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $I(2\,;1\,;0)$ appartient au plan, ses coordonnées vérifient l'équation. On a alors $2\times2+3\times1-0+d=0$ soit $d=-7$. Le plan (P) admet donc pour équation cartésienne :

$$2x+3y-z-7=0$$

Commentaires

- Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée. J'ai tout de même proposé des justifications car sinon, cette correction n'aurait pas eu un grand intérêt.
- D'après sa représentation paramétrique, la droite (d) admet pour vecteur directeur le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et donc n'importe quel vecteur qui lui est colinéaire. On peut donc choisir, par exemple, le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Dans la question 4, l'équation étant donnée, on pouvait aussi simplement vérifier que le

vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ était un vecteur normal et que les coordonnées de I vérifiaient l'équation.

1.3 Lectures graphiques et calculs

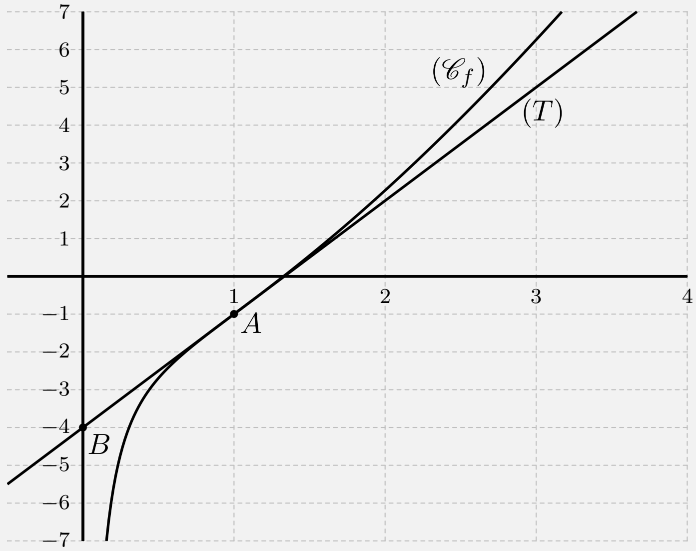
Énoncé (5 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $(1\,;\,-1)$. Cette tangente passe également par le point $B(0\,;\,-4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave. Que semble représenter le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (a) Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$$

3. (a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (b) Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Correction
Partie A

1. On lit graphiquement que le coefficient directeur de la tangente (T) est égal à 3, on a donc :

$$\boxed{f'(1) = 3}$$

Et comme (T) coupe l'axe des ordonnées en -4, son ordonnée à l'origine est égale à -4. L'équation réduite de (T) est donc :

$$\boxed{y = 3x - 4}$$

2. La fonction f semble :
   - concave sur $]0\,;\,1]$
   - convexe sur $[1\,;\,+\infty[$

   La fonction semble changer de convexité en 1, le point A semble donc être un point d'inflexion (la courbe traverse la tangente).

Partie B

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

Et pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$, on a $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ donc :

$$f(x) = 2x\ln(x) - \frac{1}{x}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0 \quad \textit{(par croissances comparées)} \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

2. (a) La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln(x^2) + x \times \frac{2x}{x^2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2}}$$

(b) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{2x^2-2}{x^3} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{x^3} \\ &= \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}}$$

3.(a) Sur $]0\,;\,+\infty[$, $2(x+1) > 0$ et $x^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x-1$, d'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	concave		convexe	

(b) La fonction f'' étant la dérivée de la fonction f', le signe de f'' permet de déterminer les variations de f'. On a alors le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	↘	3	↗	

La fonction f' atteint donc son minimum en 1 et ce minimum vaut 3. On en déduit que $f'(x) \geqslant 3$ et, a fortiori, $f(x) > 0$ pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$ et donc que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;\,+\infty[}$$

4.(a) Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in\,]-\infty\,;\,+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.

(b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $f(1{,}32) \approx -0{,}02 < 0$
- $f(1{,}33) \approx 0{,}007 > 0$

Donc :

$$\boxed{1{,}32 < \alpha < 1{,}33}$$

On sait que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire :

$$\alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0$$

Puis :

$$\alpha \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}$$

Donc :

$$\ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}$$

Et enfin, en appliquant la fonction exponentielle :

$$\boxed{\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}$$

Commentaires

- Dans la question 1 de la partie A, pour calculer le coefficient directeur m de la droite (T), sachant qu'elle passe par les points A et B, on peut utiliser la formule :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4 - (-1)}{0 - 1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

  On retient cette formule sous la forme « la différence des ordonnées sur la différence des abscisses ».
- Pour conjecturer la convexité d'une fonction, il faut retenir que si la courbe « regarde vers le haut » alors la fonction est convexe, et si la courbe « regarde vers le bas » alors la fonction est concave, .
- Dans la question 2 de la partie B, pour le calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x^2)$, on peut soit utiliser la formule $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ ou alors écrire $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ et on obtient alors pour dérivée la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x}$.
- Pour calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, on peut remarquer que $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ et utiliser la formule habituelle qui donne la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$. On obtient ainsi $-2x^{-3}$ soit $-\dfrac{2}{x^3}$.

1.4 Intégrales de Fourier

Énoncé (6 points)

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \, \mathrm{d}x$$

$$J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \cos(x) \, \mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0.
2. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $I_n \geqslant 0$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \, \mathrm{d}x$$

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \, \mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$$

   (c) Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).
4. (a) En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n} J_n$$

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $I_n = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2 + 1}$.
5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
from math import *
def seuil() :
    n=0
    I=2
    ...
        n=n+1
        I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
    return n
```

Correction

1. On a :

$$I_0 = \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) + 1 = 2$$

Soit :

$$\boxed{I_0 = 2}$$

2.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a $\mathrm{e}^{-nx} > 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$ donc :

$$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$$

Donc :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

Soit :

$$\boxed{I_n \geqslant 0}$$

(b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x) - \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$ car $x \leqslant 0$. On en déduit que $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,(\mathrm{e}^{-x}-1) \leqslant 0$ puis :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Soit :

$$\boxed{I_{n+1} - I_n \leqslant 0}$$

(c) D'après les questions précédentes, la suite (I_n) est :

- décroissante car $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- minorée par 0 car $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ converge}}$$

3.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \qquad \textit{(car } \sin(x) \leqslant 1\textit{)}$$

Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

Soit :

$$\boxed{I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x}$$

(b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{\pi}\\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi} - \left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{0}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-n\pi}+1}{n}\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}}$$

(c) D'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

4.(a) • **Première intégration par parties :**
On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-nx} \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[-\cos(x)\mathrm{e}^{-nx}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\cos(\pi)\mathrm{e}^{-n\pi} + \cos(0)\mathrm{e}^{0} - n\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - nJ_n\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n}$$

• **Deuxième intégration par parties :**
On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi}\sin(\pi) + -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{0}\sin(0) + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{n}J_n\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n} J_n}$$

(b) On en déduit que :

$$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n = \frac{1}{n} J_n$$

Puis :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) J_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi}$$

Soit :

$$\frac{n^2+1}{n} J_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi}$$

Et donc :

$$J_n = \frac{n(1+\mathrm{e}^{-n\pi})}{n^2+1}$$

Et comme $I_n = \dfrac{1}{n} J_n$, on a :

$$\boxed{I_n = \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}}$$

5. On peut compléter le script de la façon suivante :

```
from math import *
def seuil() :
    n = 0
    I = 2
    while I > 0.1 :
        n=n+1
        I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
    return n
```

Commentaires

- Dans cet exercice, on utilise les propriétés de positivité et de croissance de l'intégrale. Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$, on a :

  → Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ (positivité).

  → Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ (croissance).

- Si a est un réel alors la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ admet pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$.

SUJET 2

AMÉRIQUE DU NORD - 22 MAI 2024

2.1 Des voitures hybrides rechargeables

Énoncé

Les données publiées le 1er mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- 22,86 % des véhicules étaient des véhicules neufs ;
- 8,08 % des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables ;
- 1,27 % des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Partie A

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.
On note :

- N l'événement « le véhicule est neuf » ;
- R l'événement « le véhicule est hybride rechargeable » ;
- $\overline{N}$ et $\overline{R}$ les événements contraires des événements N et R.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.
3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est 0,0283.
4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

Partie B

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022. Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.
On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.
3. Déterminer la probabilité $p(X \geqslant 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C
On choisit désormais n véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où n désigne un entier naturel strictement positif.

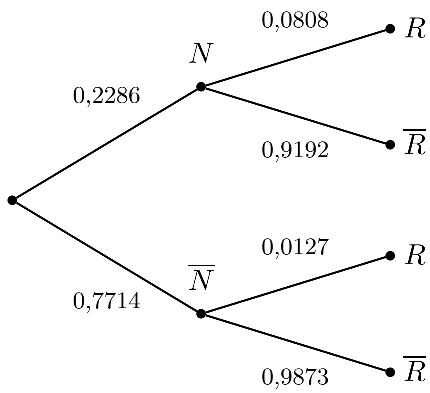
On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.

On assimile le choix de ces n véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n que tous ces véhicules soient d'occasion.
2. On note q_n la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf. En résolvant une inéquation, déterminer la plus petite valeur de n telle que $q_n \geqslant 0{,}9999$.

Correction
Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



2. Il s'agit de calculer $P(N \cap R)$:

$$\begin{aligned} P(N \cap R) &= P(N) \times P_N(R) \\ &= 0{,}2286 \times 0{,}0808 \\ &\approx 0{,}0185 \end{aligned}$$

La probabilité que le véhicule soit neuf et hybride rechargeable est donc :

$$\boxed{P(N \cap R) \approx 0{,}0185}$$

3. Il s'agit de calculer $P(R)$. Les événements N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(N) \times P_N(R) + P(\overline{N}) \times P_{\overline{N}}(R) \\ &= 0{,}2286 \times 0{,}0808 + 0{,}7714 \times 0{,}0127 \\ &\approx 0{,}0283 \end{aligned}$$

La probabilité que le véhicule soit hybride rechargeable est donc :

$$\boxed{P(R) \approx 0{,}0283}$$

4. Il s'agit de calculer $P_R(N)$:

$$\begin{aligned} P_R(N) &= \frac{P(N \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{0{,}2286 \times 0{,}0808}{0{,}2286 \times 0{,}0808 + 0{,}7714 \times 0{,}0127} \\ &\approx 0{,}6534 \end{aligned}$$

La probabilité que le véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable est donc :

$$\boxed{P_R(N) \approx 0{,}6534}$$

Partie B

1. On répète 500 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à 0,65. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 500 \text{ et } p = 0{,}65}$$

2. Il s'agit de calculer $P(X = 325)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs est :

$$\boxed{P(X = 325) \approx 0{,}0374}$$

3. On obtient, à l'aide de la calculatrice :

$$\boxed{P(X \geqslant 325) \approx 0{,}5206}$$

Cela signifie qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins 325 véhicules soient neufs.

Partie C

1. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de véhicules neufs parmi les n véhicules. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}65$. L'événement « tous les véhicules sont d'occasion » correspond à l'événement $Y = 0$. Or :

$$P(Y = 0) = \binom{n}{0} \times 0{,}65^0 \times (1 - 0{,}65)^{n-0}$$

Soit :

$$\boxed{p_n = 0{,}35^n}$$

2. L'événement « au moins un des véhicule est neuf » est l'événement contraire de l'événement « tous les véhicules sont d'occasion », on a donc $q_n = 1 - p_n$, soit :

$$q_n = 1 - 0{,}35^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} q_n \geqslant 0{,}9999 &\iff 1-0{,}35^n \geqslant 0{,}9999 \\ &\iff -0{,}35^n \geqslant -0{,}0001 \\ &\iff 0{,}35^n \leqslant 0{,}0001 \\ &\iff \ln\left(0{,}35^n\right) \leqslant \ln(0{,}0001) \\ &\iff n\ln(0{,}35) \leqslant \ln(0{,}0001) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}35)} \qquad (\textit{car } \ln(0{,}35)<0) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}35)} \approx 8{,}77$ donc la plus petite valeur de n telle que $q_n \geqslant 0{,}9999$ est :

$$\boxed{n=9}$$

Commentaires

- Dans la question 4 de la partie A, pour le calcul de $P_R(N)$, il vaut mieux prendre les valeurs exactes des probabilités $P(N\cap R)$ et $P(R)$. Si l'on prend les valeurs approchées obtenues dans les questions précédentes alors on obtient $P_R(N) \approx 0{,}6537$ au lieu de 0,6534.
- Dans la question 2 de la partie B, on peut également utiliser la formule :

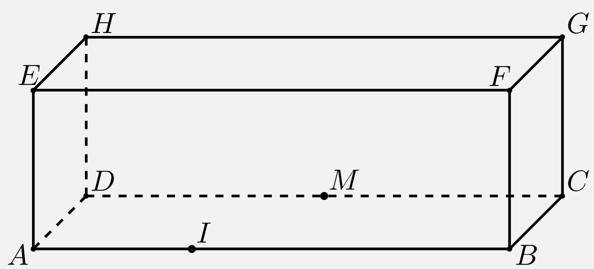
$$P(X=325) = \binom{500}{325} \times 0{,}65^{325} \times (1-0{,}65)^{500-325}$$

- Dans la partie C, plutôt que d'introduire une variable aléatoire qui compte le nombre de véhicules neufs, on aurait pu introduire une variable aléatoire Z qui compte le nombre de véhicules d'occasion. Z suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p=0{,}35$.

2.2 Un plan dans le pavé

Énoncé

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB=3$ et $AD=AE=1$ représenté ci-dessous.



On considère le point I du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment $[CD]$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AI}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.
2. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :
   $$2x + 6y + 3z - 9 = 0$$

   (c) Le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.
3. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).
   Déterminer les coordonnées du point N.
4. Le point R de coordonnées $\left(3\,;\,\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ? Justifier la réponse.

Correction

1. On a :

$$\boxed{F(3\,;\,0\,;\,1)} \qquad \boxed{H(0\,;\,1\,;\,1)} \qquad \boxed{M\left(\frac{3}{2}\,;\,1\,;\,0\right)}$$

2. (a) On a $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et donc :

   - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{HM} = 2 \times \dfrac{3}{2} + 6 \times 0 + 3 \times (-1) = 3 + 0 - 3 = 0$
   - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{HF} = 2 \times 3 + 6 \times (-1) + 3 \times 0 = 6 - 6 + 0 = 0$

   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF), on en déduit que :
   $$\boxed{\overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal au plan } (HMF)}$$

   (b) On en déduit que le plan (HMF) admet une équation cartésienne de la forme :
   $$2x + 6y + 3z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

   De plus, le point $H(0\,;\,1\,;\,1)$ appartient au plan (HMF) donc ses coordonnées vérifient l'équation, soit $2 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 1 + d = 0$ et donc $d = -9$. Une équation cartésienne du plan (HMF) est donc :
   $$\boxed{2x + 6y + 3z - 9 = 0}$$

(c) D'après son équation cartésienne, le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}5\\15\\-3\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires donc :

$$\boxed{\text{Les plans } \mathscr{P} \text{ et } (HMF) \text{ ne sont pas parallèles}}$$

3. La droite (DG) admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

On injecte les expressions de la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne du plan (HMF) :

$$\begin{aligned} 2 \times 3t + 6 \times 1 + 3 \times t - 9 = 0 &\iff 6t + 6 + 3t - 9 = 0 \\ &\iff 9t = 3 \\ &\iff t = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Le point N est donc le point de paramètre $t = \dfrac{1}{3}$ dans la représentation paramétrique de la droite (DG), soit :

$$\boxed{N\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{3}\right)}$$

4. On a $\overrightarrow{RG}\begin{pmatrix}0\\3/4\\1/2\end{pmatrix}$ donc le vecteur $\overrightarrow{RG}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$. On en déduit que $\overrightarrow{RG}$ n'est pas orthogonal au plan (HMF) et donc que :

$$\boxed{R \text{ n'est pas le projeté orthogonal de } G \text{ sur le plan } (HMF)}$$

Commentaires

- Dans la question 4, on aurait pu chercher à déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de G sur le plan (HMF). On utilise pour cela une représentation paramétrique de la droite Δ passant par G et orthogonale au plan (HMF) :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 6t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

On injecte dans l'équation cartésienne de (HMF) :

$$2(3 + 2t) + 6(1 + 6t) + 3(1 + 3t) - 9 = 0$$

Soit :

$$6 + 4t + 6 + 36t + 3 + 9t - 9 = 0$$

D'où :

$$49t = -6$$

Et donc :

$$t = -\frac{6}{49}$$

Le projeté orthogonal de G sur le plan (HMF) est donc le point de coordonnées :

$$\left(\frac{135}{49}\,;\,\frac{13}{49}\,;\,\frac{31}{49}\right)$$

Ce n'est donc pas le point G.

2.3 Une suite définie par une fonction logarithme

Énoncé

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $g(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite l de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.
9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```python
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u<0.95 :
        n=...
        u=...
    return n
```

Correction

1. La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et pour tout $x \in [0\,;\,1]$:

$$g'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$$

Pour tout $x \in [0\,;\,1[$, on a $g'(x) > 0$ donc :

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0\,;\,1]}$$

Et on a :

$$\boxed{g(0) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{g(1) = 1}$$

2. On a :

- $u_1 = g\left(u_0\right) = g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \times \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$
- $u_2 = g\left(u_1\right) = g\left(\dfrac{3}{4}\right) = 2 \times \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{15}{16}$

Soit :

$$\boxed{u_1 = \frac{3}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_2 = \frac{15}{16}}$$

3. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

- **Initialisation :**
Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0{,}5$ et $u_1 = 0{,}75$. On a donc bien :

$$0 < 0{,}5 < 0{,}75 < 1$$

La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité :**
Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
On a alors, en appliquant la fonction g qui est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$:

$$g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$$

Soit :

$$0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. D'après la question précédente, la suite (u_n) est :

- croissante (car $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)
- majorée par 1 (car $u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

5. La fonction g étant continue sur $[0\,;\,1]$, on sait que la limite l est un point fixe de g, c'est-à-dire une solution de l'équation $g(x) = x$. Résolvons cette équation, soit $x \in [0\,;\,1]$:

$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff 2x - x^2 = x \\ &\iff x - x^2 = 0 \\ &\iff x(1-x) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}$$

Or $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et la suite (u_n) est croissante, elle ne peut donc pas converger vers 0. On en déduit que :

$$\boxed{l = 1}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(1 - u_{n+1}) \\ &= \ln(1 - g(u_n)) \\ &= \ln(1 - 2u_n + u_n^2) \\ &= \ln\left((1 - u_n)^2\right) \\ &= 2\ln(1 - u_n) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

Et comme $v_0 = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison 2 et de } 1^{\text{er}} \text{ terme } v_0 = -\ln(2)}$$

7. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n$, soit :

$$\boxed{v_n = -\ln(2) \times 2^n}$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \ln(1 - u_n)$ donc, en appliquant la fonction exponentielle :

$$\mathrm{e}^{v_n} = 1 - u_n$$

Et donc :

$$u_n = 1 - \mathrm{e}^{v_n}$$

Soit :

$$\boxed{u_n = 1 - \mathrm{e}^{-\ln(2)\times 2^n}}$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (-\ln(2) \times 2^n) = -\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\ln(2)\times 2^n}\right) = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

9. On peut compléter le script de la façon suivante :

```python
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.5
    while u < 0.95 :
        n = n+1
        u = 2*u - u**2
    return n
```

Commentaires

- Dans la question 4, on montre que la suite converge mais on ne connaît pas la valeur de la limite.
- Dans la question 8, on peut obtenir une écriture différente de l'expression de u_n, en effet on a :

$$\mathrm{e}^{-\ln(2)\times 2^n} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\times 2^n} = \left(\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

Et donc :

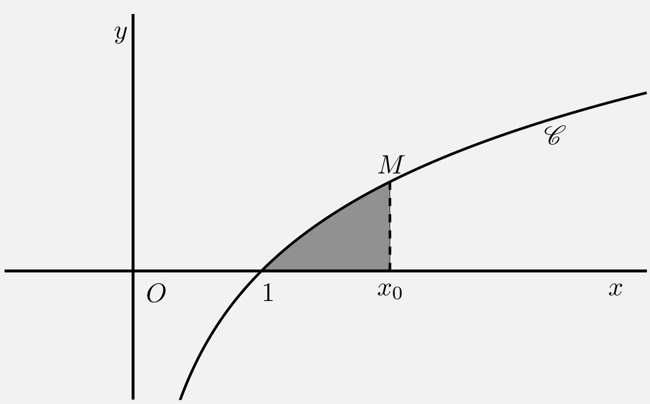
$$\boxed{u_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

2.4 Une distance sur une courbe

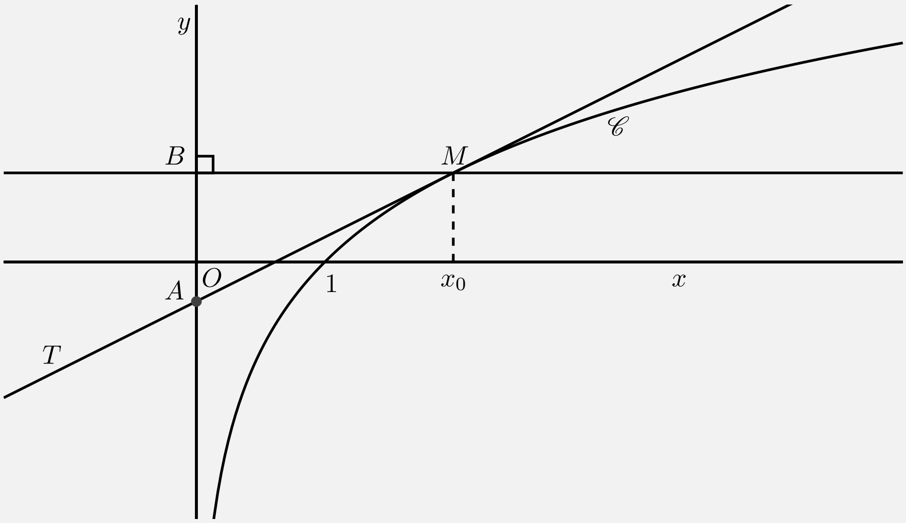
Énoncé

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = a\ln(x)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a\,(x\ln(x) - x)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. En déduire l'aire du domaine grisé en fonction de a et de x_0.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera. *Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.*

Correction

1. Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 0$. Soit $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff a\ln(x) = 0 \\ &\iff \ln(x) = 0 \quad (\text{car } a \neq 0) \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

L'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses est donc :

$$\boxed{x = 1}$$

2. La fonction F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= a\left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1\right) \\ &= a\,(\ln(x) + 1 - 1) \\ &= a\ln(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0\,;+\infty[}$$

3. Il s'agit de calculer l'intégrale entre 1 et x_0 de la fonction f :

$$\begin{aligned}\int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^{x_0} a\ln(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[a(x\ln(x)-x)\Big]_1^{x_0} \\ &= a(x_0\ln(x_0)-x_0) - a(1\times\ln(1)-1) \\ &= a(x_0\ln(x_0)-x_0)+a \\ &= a(x_0\ln(x_0)-x_0+1)\end{aligned}$$

L'aire du domaine grisé est donc :

$$\boxed{\mathscr{A} = a(x_0\ln(x_0)-x_0+1)}$$

4. Déterminons l'équation réduite de la tangente T. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x)=\dfrac{a}{x}$.
   - $f(x_0) = a\ln(x_0)$
   - $f'(x_0) = \dfrac{a}{x_0}$

   La tangente T admet donc pour équation :

$$y = \frac{a}{x_0}\,(x-x_0)+a\ln(x_0)$$

   Soit :

$$y = \frac{a}{x_0}x - a + a\ln(x_0)$$

   L'ordonnée à l'origine est donc $-a+a\ln(x_0)$, il s'agit de l'ordonnée du point A. Et comme l'ordonnée du point B est $a\ln(x_0)$, on a :

$$\begin{aligned}AB &= y_B - y_A \\ &= a\ln(x_0) - (-a+a\ln(x_0)) \\ &= a\ln(x_0)+a-a\ln(x_0) \\ &= a\end{aligned}$$

   La longueur AB est donc égale à une constante. Plus précisément :

$$\boxed{AB = a}$$

Commentaires

- La formule donnant la distance entre deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ du plan est :

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

  Mais dans cet exercice les points A et B ont la même abscisse, on a donc $AB = |y_B - y_A|$.

SUJET 3

CENTRES ÉTRANGERS - 5 JUIN 2024

3.1 Valeur prédictive d'un contrôle antidopage

Énoncé

Partie A

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \frac{0,96x}{0,93x + 0,03}$$

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$f'(x) = \frac{0,0288}{(0,93x + 0,03)^2}$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie B

La lutte contre le dopage passe notamment par la réalisation de contrôles antidopage qui visent à déterminer si un sportif a fait usage de substances interdites.
Lors d'une compétition rassemblant 1 000 sportifs, une équipe médicale teste tous les concurrents. On propose d'étudier la fiabilité de ce test.

On appelle x le réel compris entre 0 et 1 qui désigne la proportion de sportifs dopés.

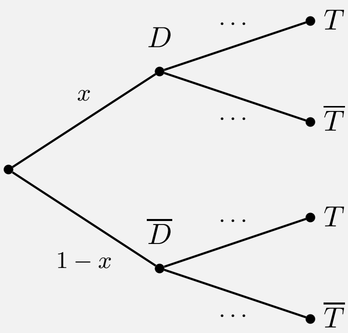
Lors de l'élaboration de ce test, on a pu déterminer que :

- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à 0,96 ;
- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il n'est pas dopé est égale à 0,03.

On note :

- D l'événement : « le sportif est dopé ».
- T l'événement : « le test est positif ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Déterminer, en fonction de x, la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif.
3. Démontrer que la probabilité de l'événement T est égale à $0{,}93x + 0{,}03$.
4. Pour cette question uniquement, on suppose qu'il y a 50 sportifs dopés parmi les 1 000 testés.
   La fonction f désigne la fonction définie à la **partie A**.
   Démontrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est égale à $f(0{,}05)$. En donner une valeur arrondie au centième.
5. On appelle valeur prédictive positive d'un test la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.
   (a) Déterminer à partir de quelle valeur de x la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à 0,9. *Arrondir le résultat au centième.*
   (b) Un responsable de la compétition décide de ne plus tester l'ensemble des sportifs, mais de cibler les sportifs les plus performants supposés être plus fréquemment dopés.
   Quelle est la conséquence de cette décision sur la valeur prédictive positive du test ?
   *Argumenter en utilisant un résultat de la **partie A**.*

Correction
Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,1]$, et pour tout $x \in [0\,;\,1]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{0{,}96(0{,}93x + 0{,}03) - 0{,}96x \times 0{,}93}{(0{,}93x + 0{,}03)^2} \\ &= \frac{0{,}8928x + 0{,}0288 - 0{,}8928x}{(0{,}93x + 0{,}03)^2} \\ &= \frac{0{,}0288}{(0{,}93x + 0{,}03)^2} \end{aligned}$$

Soit :

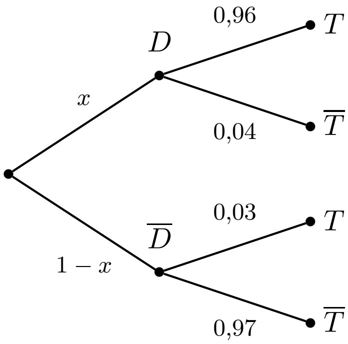
$$\boxed{f'(x) = \frac{0{,}0288}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}}$$

2. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $(0{,}93x + 0{,}03)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [0\,;\,1]}$$

Partie B

1. On peut compléter l'arbre de la façon suivante :



2. Il s'agit de calculer $P(D \cap T)$:

$$\begin{aligned} P(D \cap T) &= P(D) \times P_D(T) \\ &= x \times 0{,}96 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif est donc :

$$\boxed{P(D \cap T) = 0{,}96x}$$

3. Les événements D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers. On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(D) \times P_D(T) + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) \\ &= x \times 0{,}96 + (1-x) \times 0{,}03 \\ &= 0{,}96x + 0{,}03 - 0{,}03x \\ &= 0{,}93x + 0{,}03 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{P(T) = 0{,}93x + 0{,}03}$$

4. Il s'agit de calculer $P_T(D)$:

$$\begin{aligned} P_T(D) &= \frac{P(D \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

La probabilité que le sportif soit dopé sachant que le test est positif est donc égale à $f(x)$. Et comme il y a 50 sportifs dopés parmi les 1 000 testés, on a $x = \dfrac{50}{1\,000} = 0{,}05$. La probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est :

$$\boxed{P_T(D) = f(0{,}05) \approx 0{,}63}$$

5.(a) La valeur prédictive positive du test est égale à $P_T(D)$ et, d'après la question précédente, $P_T(D) = \dfrac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03}$. On a alors :

$$\begin{aligned} P_T(D) \geqslant 0{,}9 &\iff \frac{0{,}96x}{0{,}93x+0{,}03} \geqslant 0{,}9 \\ &\iff 0{,}96x \geqslant 0{,}9(0{,}93x+0{,}03) \\ &\iff 0{,}96x \geqslant 0{,}837x + 0{,}027 \\ &\iff 0{,}123x \geqslant 0{,}027 \\ &\iff x \geqslant \frac{0{,}027}{0{,}123} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{0{,}027}{0{,}123} \approx 0{,}22$ la valeur de x à partir de laquelle la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à 0,9 est :

$$\boxed{x \approx 0{,}22}$$

(b) D'après la question précédente, pour une proportion x de sportifs dopés, la valeur prédictive positive du test est :

$$P_T(D) = f(x)$$

En ne ciblant que les sportifs supposés être plus fréquemment dopés, la proportion x augmente. Or, d'après la partie A, la fonction f est croissante donc une conséquence de cette décision est que :

$$\boxed{\text{La valeur prédictive positive du test va augmenter}}$$

Commentaires

- La valeur prédictive positive du test est donc la probabilité qu'un sportif soit réellement dopé sachant que son test est positif. De la même façon, on définit la valeur prédictive négative comme la probabilité que le sportif ne soit pas dopé sachant que son test est négatif.

3.2 Une suite définie par une fonction exponentielle

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1.(a) Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

(b) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

(c) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

2.(a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

4.(a) Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.

(b) On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.
Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.1
    while ln(2) - u ... 0.0001 :
        n=n+1
        u=...
    return (u,n)
```

(c) Donner la valeur de la variable `n` renvoyée par la fonction `seuil()`.

Correction

1.(a) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} = x \\ &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} - x = 0 \\ &\iff x\left(2\mathrm{e}^{-x} - 1\right) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} = 1 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{2} \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2) \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\,;\,\ln(2)\}}$$

(b) La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et, pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times \mathrm{e}^{-x} + 2x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (2 - 2x)\mathrm{e}^{-x} \\ &= 2(1 - x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = 2(1 - x)\mathrm{e}^{-x}}$$

(c) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a $2 > 0$, $(1 - x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$. On en déduit le tableau :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$

2.(a) Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

- **Initialisation :**
Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0{,}1$ et $u_1 = f(0{,}1) = 0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}1} \approx 0{,}18$.
On a donc bien $0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 1$.
- **Hérédité :**
Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :
$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$$
On a alors, en appliquant la fonction f qui est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$:
$$f(0) \leqslant f(u_n) < f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$$
Soit :
$$0 \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 2\mathrm{e}^{-1}$$
Or $2\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}74 < 1$ donc, a fortiori :
$$0 \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 1$$
La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion :**
La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\boxed{0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1}$$

(b) D'après la question précédente, la suite (u_n) est :

- croissante (car $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)
- majorée par 1 (car $u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

On en déduit que :
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$

3. D'après la question précédente, la suite (u_n) converge, notons ℓ sa limite. La fonction f étant continue sur $[0\,;\,1]$, on a alors, par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$:
$$\ell = f(\ell)$$
Autrement dit ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Or on a vu, dans la question 1a, que l'équation $f(x) = x$ admettait deux solution sur $[0\,;\,1]$: 0 et $\ln(2)$. Enfin, la suite (u_n) est croissante et $u_0 = 0{,}1$ donc la suite (u_n) ne peut pas converger vers 0. On en déduit que la limite de la suite (u_n) est :
$$\boxed{\ell = \ln(2)}$$

4.(a) La suite (u_n) est croissante et converge vers $\ln(2)$, elle est donc majorée par $\ln(2)$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln(2)$, ou encore :

$$\boxed{\ln(2) - u_n \geqslant 0}$$

(b) On peut compléter le script de la façon suivante :

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.1
    while log(2) - u > 0.0001 :
        n = n+1
        u = 2*u*exp(-u)
    return (u,n)
```

(c) En programmant ce script sur la calculatrice, on obtient le résultat :

```
(0.6931009075876846, 11)
```

La valeur de la variable n est donc :

$$\boxed{n = 11}$$

Commentaires

- Dans la question 1a, on utilise le fait que :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

- le maximum de la fonction f, $2e^{-1}$ (atteint en 1) peut également s'écrire $\dfrac{2}{e}$.
- Dans la question 4a, on aurait également pu montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln(2)$.
- Dans la question 4b, il y a une erreur d'énoncé. En effet, la fonction `ln` n'existe pas en Python, il faut utiliser la fonction `log` (qui renvoie le logarithme népérien). De plus, il faut importer les fonctions `log` et `exp` à l'aide des commande « `from math import log` » et « `from math import exp` », ou encore plus simplement « `from math import *` ».
- Dans la question 4c, on aurait également pu calculer, à l'aide de la calculatrice, les termes de la suite (u_n) ainsi que ceux de la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \ln(2) - u_n$ et constater que :

  → $v_{10} \approx 0{,}00015 > 0{,}0001$

  → $v_{11} \approx 0{,}00005 < 0{,}0001$

  C'est donc bien à partir de $n = 11$ que $\ln(2) - u_n \leqslant 0{,}0001$.

3.3 Équation différentielle et fonctions trigonométriques

Énoncé

On considère l'équation différentielle (E_0) : $y' = y$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right) \mathrm{d}x.$$

Correction

1. Soit f une fonction constante, il existe donc un réel k tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$. La fonction f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$. La fonction f est alors solution de (E_0) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$, soit $0 = k$. On en déduit que :
$$\boxed{f \text{ est la fonction nulle}}$$
2. L'équation différentielle (E_0) est de la forme $y' = ay$ avec $a = 1$, les solutions sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$ soit les fonctions :
$$\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$
3. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$$
   Et d'autre part :
$$\begin{aligned} h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) &= 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x) \\ &= \cos(x) - 2\sin(x) \end{aligned}$$
   On a donc $h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc :
$$\boxed{h \text{ est solution de l'équation différentielle } (E)}$$

4. On a :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - h'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - h'(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - h'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - h(x) + \cos(x) + 3\sin(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, (f-h)'(x) = (f-h)(x) \\ &\iff f - h \text{ est solution de } (E_0) \end{aligned}$$

On a donc montré l'équivalence :

$$\boxed{f \text{ est solution de } (E) \iff f - h \text{ est solution de } (E_0)}$$

5. D'après la question précédente, f est une solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0), c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel C tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f-h)(x) = C\mathrm{e}^x$, soit $f(x) = C\mathrm{e}^x + h(x)$. Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

6. Soit g une solution de (E), il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = C\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} g(0) = 0 &\iff C\mathrm{e}^0 + 2\cos(0) + \sin(0) = 0 \\ &\iff C + 2 = 0 \\ &\iff C = -2 \end{aligned}$$

L'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$ est donc la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\boxed{g(x) = -2\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)}$$

7. Notons I l'intégrale demandée, on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-2\mathrm{e}^x - \cos(x) + 2\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(-2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(-2\mathrm{e}^0 - \cos(0) + 2\sin(0)\right) \\ &= \left(-2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 2\right) - (-2 - 1) \\ &= -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 2 + 3 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x))\,\mathrm{d}x = 5 - 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}$$

Commentaires

- Dans les questions 4 et 5,on a démontré que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions qui s'écrivent comme la somme des solutions de l'équation homogène associée et d'une solution particulière. Ce résultat peut parfois être considéré comme une propriété du cours.

3.4 Intersection de deux droites

Énoncé

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,,\,\overrightarrow{k})$.

On considère :

- les points $A(-2\,;\,0\,;\,2)$, $B(-1\,;\,3\,;\,0)$, $C(1\,;\,-1\,;\,2)$ et $D(0\,;\,0\,;\,3)$.
- la droite $\mathscr{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3+5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
- la droite $\mathscr{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1+3s \\ y = -1-5s \\ z = 2-6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).
   (b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :
   $$x + 3y + 5z - 8 = 0$$
   (c) En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
3. (a) Justifier que la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D.
   On admet que la droite $\mathscr{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de C.
   (b) Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
4. (a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).
   (b) Calculer la distance du point D au plan (ABC). *Arrondir le résultat au centième.*

Correction

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (leurs coor-

données ne sont pas proportionnelles) donc :

$$\boxed{\text{Les points } A,\ B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$$

2.(a) On a :

- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 3 \times 3 + 5 \times (-2) = 1 + 9 - 10 = 0$
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 1 \times 3 + 3 \times (-1) + 5 \times 0 = 3 - 3 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), on en déduit que :

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est orthogonal au plan } (ABC)}$$

(b) Le plan (ABC) admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ pour vecteur normal, il admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$x + 3y + 5z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point $A(-2\,;\,0\,;\,2)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $-2 + 3 \times 0 + 5 \times 2 + d = 0$ soit $d = -8$. On en déduit que le plan (ABC) admet l'équation cartésienne :

$$\boxed{x + 3y + 5z - 8 = 0}$$

(c) Les coordonnées du point D ne vérifient pas l'équation du plan (ABC).
En effet $0 + 3 \times 0 + 5 \times 3 - 8 = 7 \neq 0$. On en déduit que le point D n'appartient pas au plan (ABC) et donc que :

$$\boxed{\text{Les points } A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ ne sont pas coplanaires}}$$

3.(a) Il s'agit de vérifier que la droite $\mathscr{D}_1$ passe par D et est orthogonale au plan (ABC).

- D'après sa représentation paramétrique, la droite $\mathscr{D}_1$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$.
  Or ce vecteur est le vecteur $\overrightarrow{n}$, qui est normal au plan (ABC) donc la droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonale au plan (ABC).
- Le point D appartient à la droite $\mathscr{D}_1$, en effet c'est le point de paramètre $t = 0$ dans la représentation paramétrique.

Finalement :

$$\boxed{\mathscr{D}_1 \text{ est la hauteur du tétraèdre } ABCD \text{ issue de } D}$$

(b) Résolvons le système obtenu à l'aide des représentations paramétriques de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$:

$$\begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3t = -1 - 5s \\ 3 + 5t = 2 - 6s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3(1 + 3s) = -1 - 5s \\ 3 + 5(1 + 3s) = 2 - 6s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 3 + 9s = -1 - 5s \\ 3 + 5 + 15s = 2 - 6s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1 + 3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 1 + 3 \times \left(-\dfrac{2}{7}\right) \\ s = -\dfrac{2}{7} \\ s = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = \dfrac{1}{7} \\ s = -\dfrac{2}{7} \end{cases}$$

Le système admet un unique couple solution donc les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes. Leur point d'intersection est le point de paramètre $t = \dfrac{1}{7}$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ et $s = -\dfrac{2}{7}$ dans celle de $\mathscr{D}_2$, c'est-à-dire le point de coordonnées :

$$\boxed{\left(\frac{1}{7}\,;\,\frac{3}{7}\,;\,\frac{26}{7}\right)}$$

4.(a) Il s'agit de déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite $\mathscr{D}_1$ et du plan (ABC). On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ dans l'équation cartésienne du plan (ABC) :

$$\begin{aligned} t + 3 \times 3t + 5(3 + 5t) - 8 = 0 &\iff t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0 \\ &\iff 35t = -7 \\ &\iff t = -\frac{7}{35} \\ &\iff t = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Le point H est donc le point de paramètre $t = -\dfrac{1}{5}$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$, soit :

$$\boxed{H\left(-\frac{1}{5}\,;\,-\frac{3}{5}\,;\,2\right)}$$

(b) Le point H étant le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC), la distance cherchée est la longueur DH.

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{\left(-\frac{1}{5}-0\right)^2+\left(-\frac{3}{5}-0\right)^2+(2-3)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{25}+\frac{9}{25}+1} \\ &= \sqrt{\frac{35}{25}} \\ &= \frac{\sqrt{35}}{5} \end{aligned}$$

La distance du point D au plan (ABC) est donc :

$$\boxed{DH = \frac{\sqrt{35}}{5} \approx 1{,}18}$$

Commentaires

- Dans la question 2b, l'équation du plan étant donné dans l'énoncé, on peut aussi simplement vérifier que les coordonnées de chacun des points A, B et C vérifient cette équation.
- Dans la question 3b, afin de déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux droites, après avoir déterminé les valeurs de t et s, il suffit de remplacer t par sa valeur dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ ou s par sa valeur dans celle de $\mathscr{D}_2$.

SUJET 4

CENTRES ÉTRANGERS - 6 JUIN 2024

4.1 Tirages de jetons

Énoncé

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.
À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.
Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.
Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4\,;\,5\,;\,1)$.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. (a) Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   (b) En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.
Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1.

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
6. Déterminer $P(S = 24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
   (a) Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
   (b) En déduire la probabilité de gagner un lot.

Correction

1. Il s'agit du nombre de triplets dans un ensemble à 8 éléments. Le nombre de tirages possibles est donc :

$$\boxed{8^3 = 512}$$

2.(a) Il s'agit du nombre de triplets d'éléments distincts dans un ensemble à 8 éléments. Le nombre de tirages sans répétition de numéro est donc :

$$\boxed{\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336}$$

(b) Le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro est donc :

$$\boxed{512 - 336 = 176}$$

3. La variable aléatoire X_1 suit une loi uniforme sur l'ensemble des entiers compris entre 1 et 8. Autrement dit sa loi est donnée par le tableau :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

4. Calculons l'espérance $E(X_1)$ de la variable aléatoire X_1 :

$$\begin{aligned} E(X_1) &= 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{8} + 5 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{8} + 7 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{7}{8} + \frac{8}{8} \\ &= \frac{36}{8} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{E(X_1) = \frac{9}{2} = 4{,}5}$$

5. On a $S = X_1 + X_2 + X_3$ donc, par linéarité de l'espérance, l'espérance de S est :

$$\begin{aligned} E(S) &= E(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) \\ &= 4{,}5 + 4{,}5 + 4{,}5 \\ &= 13{,}5 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{E(S) = 13{,}5}$$

6. La seule façon d'obtenir une somme égale à 24 est d'obtenir 8 pour chacun des trois jetons. On a donc :

$$\begin{aligned} P(S = 24) &= P\left((X_1 = 8) \cap (X_2 = 8) \cap (X_3 = 8)\right) \\ &= P(X_1 = 8) \times P(X_2 = 8) \times P(X_3 = 8) \quad \textit{(par indépendance)} \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{512} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{P(S=24)=\frac{1}{512}}$$

7.(a) Les tirages permettant d'obtenir une somme supérieure ou égale à 22 sont : (8 ; 8 ; 8), (7 ; 8 ; 8), (8 ; 7 ; 8), (8 ; 8 ; 7), (7 ; 7 ; 8), (7 ; 8 ; 7), (8 ; 7 ; 7), (6 ; 8 ; 8), (8 ; 6 ; 8) et (8 ; 8 ; 6). Soit :

$$\boxed{10 \text{ tirages}}$$

(b) Tous les tirages étant équiprobables, la probabilité de gagner un lot est donc :

$$\boxed{P(S\geqslant 22)=\frac{10}{512}=\frac{5}{256}}$$

Commentaires

- La loi uniforme n'est pas au programme de terminale mais sinon on aurait pu calculer l'espérance de X_1 à l'aide de la formule $E(X_1)=\dfrac{1+8}{2}$.
- Dans la question 6, on aurait aussi pu remarquer que sur les 512 tirage possibles, il y en a un seul qui permet d'obtenir une somme égale à 24, d'où $P(S=24)=\dfrac{1}{512}$.

4.2 Une inégalité de convexité

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1.(a) Déterminer la limite de la fonction f en 1.
(b) En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3.(a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;1[$, on a $f'(x)=\dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$.
(b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;1[$, on a $f''(x)=\dfrac{(x^2-4x+5)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}$.
(a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.
(b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
(c) En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;1[$, on a : $\mathrm{e}^x\geqslant(-2x-1)(x-1)$.

5.(a) Justifier que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.
(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Correction

1.(a) On a :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \mathrm{e}^x = \mathrm{e} > 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-1) = 0^- \end{cases}$$

(b) On en déduit que :

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C} \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 1}$$

2. On a :

$$\boxed{\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} (x-1) = -\infty \end{cases}$$

3.(a) La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[$, comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x \in\,]-\infty\,;\,1[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x \times (x-1) - \mathrm{e}^x \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1-1)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}}$$

(b) Pour tout $x \in\,]-\infty\,;\,1[$, on a $\mathrm{e}^x > 0$, $x-2 < 0$ et $(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$. On en déduit le tableau :

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	‖
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖

4.(a) Pour tout $x \in\,]-\infty\,;\,1[$, $\mathrm{e}^x > 0$, $(x-1)^3 < 0$ (car $x-1<0$) et $x^2-4x+5>0$ (car c'est un polynôme du second degré sans racine réelle). On en déduit que, pour tout $x \in\,]-\infty\,;\,1[$, $f''(x) < 0$ et donc que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est concave sur }]-\infty\,;\,1[}$$

(b) On a $f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{0-1} = -1$ et $f'(0) = \dfrac{-2\mathrm{e}^0}{(-1)^2} = -2$. La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = -2(x-0)-1$ soit :

$$\boxed{y = -2x - 1}$$

(c) La fonction f étant concave sur $]-\infty\,;1[$, sa courbe représentative est en-dessous de ses tangentes. En particulier $\mathscr{C}$ est en-dessous de T. On a donc, pour tout $x \in\ ]-\infty\,;1[$, $f(x) \leqslant -2x-1$ soit :

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x-1} \leqslant -2x-1$$

Et donc, en multipliant par $x-1$, qui est négatif :

$$\boxed{\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1)}$$

5. (a) Sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. Or $-2 \in\ ]-\infty\,;0[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $]-\infty\,;1[$.

(b) On a :

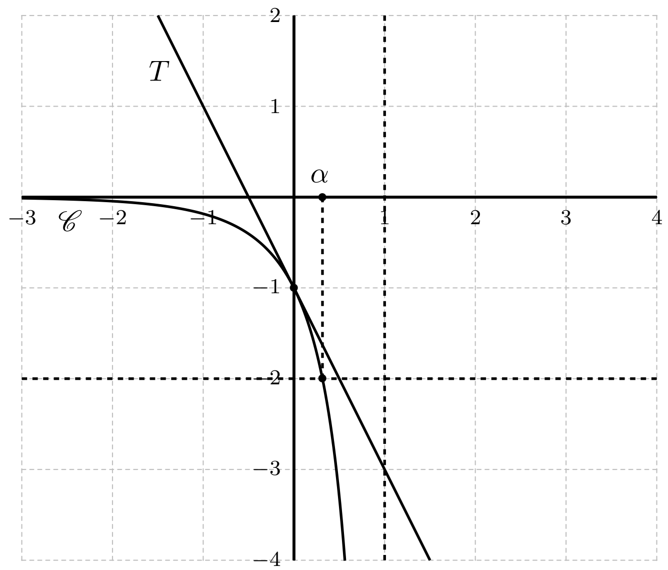
- $f(0{,}31) \approx -1{,}98 > -2$
- $f(0{,}32) \approx -2{,}03 < -2$

On en déduit :

$$\boxed{0{,}31 < \alpha < 0{,}32}$$

Commentaires

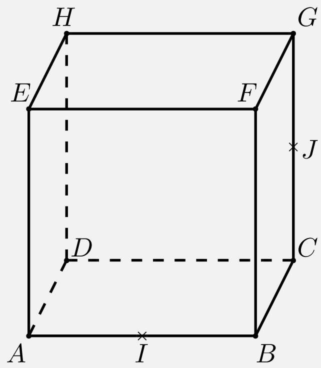
- Dans la question 4a, pour étudier le signe de x^2-4x+5, on peut calculer son discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times 5 = -4$. Le discriminant étant strictement négatif, le polynôme n'a pas de racine réelle et est du signe du coefficient de x^2, donc strictement positif, sur $\mathbb{R}$.
- Voici la courbe représentative de la fonction f ainsi que la tangente au point d'abscisse 0, l'asymptote verticale d'équation $x=1$ et l'abscisse α solution de l'équation $f(x)=-2$.



4.3 Un volume pour calculer une aire

Énoncé

Le cube $ABCDEFGH$ a pour arête 1 cm.
Le point I est le milieu du segment $[AB]$ et le point J est le milieu du segment $[CG]$.



On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (FHI) est $-2x - 2y + z + 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EJ).
5. (a) On note K le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI).
   Calculer ses coordonnées.
   (b) Montrer que le volume de la pyramide $EFHI$ est $\dfrac{1}{6}$ cm^3.
   On pourra utiliser le point L, milieu du segment $[EF]$. On admet que ce point est le projeté orthogonal du point I sur le plan (EFH).
   (c) Déduire des deux questions précédentes l'aire du triangle FHI.

Correction

1. On a :

$$\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{J\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)}$$

2. On a $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$. On a alors :

- $\overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{FH} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times 0 = -1 + 1 = 0$
- $\overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{FI} = 1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 1 \times 0 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times (-1) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHI). On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{EJ} \text{ est normal au plan } (FHI)}$$

3. D'après la question précédente, le plan (FHI) admet une équation cartésienne de la forme :

$$-2x - 2y + z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point $F(1\,;\,0\,;\,1)$ appartient au plan donc ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $-2 - 0 + 1 + d = 0$ soit $d = 1$. Le plan (FHI) admet donc pour équation cartésienne :

$$\boxed{-2x - 2y + z + 1 = 0}$$

4. La droite (EJ) passe par le point $E(0\,;\,0\,;\,1)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - \dfrac{1}{2}t \end{cases}} \quad t \in \mathbb{R}$$

5.(a) Il s'agit de déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (EJ) et du plan (FHI). On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de (EJ) dans l'équation cartésienne du plan (FHI) :

$$\begin{aligned} -2t - 2t + 1 - \frac{1}{2}t + 1 = 0 &\iff -\frac{9}{2}t = -2 \\ &\iff t = 2 \times \frac{2}{9} \\ &\iff t = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Le point K est donc le point de paramètre $t = \dfrac{4}{9}$ dans la représentation paramétrique de la droite (EJ), soit :

$$\boxed{K\left(\frac{4}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{7}{9}\right)}$$

(b) Soit $L\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$ le milieu du segment $[EF]$, projeté orthogonal du point I sur le plan (EFH). Soit $\mathscr{A}_{EFH}$ l'aire du triangle rectangle EFH, on a :

$$\mathscr{A}_{EFH} = \frac{EF \times EH}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

En choisissant le triangle EFH comme base, la hauteur correspondante est la longueur IL, le volume $\mathscr{V}_{EFHI}$ de la pyramide $EFHI$ est alors égal à :

$$\mathscr{V}_{EFHI} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{EFH} \times IL = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$$

Le volume de la pyramide $EFHI$ est donc, en cm^3 :

$$\boxed{\mathscr{V}_{EFHI} = \frac{1}{6}}$$

(c) D'autre part, on peut exprimer le volume de la pyramide $EFHI$ en choisissant le triangle FHI pour base. La hauteur correspondante est alors la longueur EK. Or :

$$\begin{aligned} EK &= \sqrt{\left(\frac{4}{9} - 0\right)^2 + \left(\frac{4}{9} - 0\right)^2 + \left(\frac{7}{9} - 1\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81}} \\ &= \sqrt{\frac{36}{81}} \\ &= \frac{6}{9} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On a alors, en notant $\mathscr{A}_{FHI}$ l'aire du triangle FHI :

$$\mathscr{V}_{EFHI} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{FHI} \times EK = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{FHI} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}\mathscr{A}_{FHI}$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{2}{9}\mathscr{A}_{FHI} = \frac{1}{6}$$

Soit $\mathscr{A}_{FHI} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2}$ et donc l'aire du triangle FHI, en cm^3, est :

$$\boxed{\mathscr{A}_{FHI} = \frac{3}{4}}$$

Commentaires

- Dans la question 5, on utilise le fait que l'on peut exprimer le volume d'un tétraèdre de deux façons différentes afin d'en déduire une aire. C'est un raisonnement classique que l'on retrouve souvent dans les sujets de bac.

4.4 Convergence vers le nombre d'or

Énoncé

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+1}$.
On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

$$f(x)-x=\frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ l'équation $f(x)=x$ admet pour unique solution :

$$\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. On considère le script Python ci-dessous :

```
from math import *
def seuil(n):
    u=5
    i=0
    l=(1+sqrt(5))/2
    while abs(u-l)>=10**(-n):
        u=sqrt(u+1)
        i=i+1
    return(i)
```

On rappelle que la commande `abs(x)` *renvoie la valeur absolue de* `x`.

(a) Donner la valeur renvoyée par `seuil(2)`.

(b) La valeur renvoyée par `seuil(4)` est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Correction
Partie A

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est croissante sur l'intervalle } [0\,;\,+\infty[}$$

2. Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) - x &= \sqrt{x+1} - x \\
&= \frac{(\sqrt{x+1} - x)(\sqrt{x+1} + x)}{\sqrt{x+1} + x} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x+1} + x} \\
&= \frac{x + 1 - x^2}{\sqrt{x+1} + x}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}}$$

3. Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\Longleftrightarrow f(x) - x = 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x} = 0 \\
&\Longleftrightarrow -x^2 + x + 1 = 0
\end{aligned}$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré qui admet pour discriminant $\Delta = 5$ et qui a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{-2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{-2}$$

Soit :

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Or x_2 n'appartient pas à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ donc l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$\boxed{\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = f(5) = \sqrt{6} \approx 2{,}45$. On a donc bien $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :
     $$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$
     On a, en appliquant la fonction f, qui est croissante sur $[0\,;+\infty[$:
     $$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$$
     Soit :
     $$\sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$
     Et donc, a fortiori :
     $$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$
     La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
   - **Conclusion :**
     La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
     $$\boxed{1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$$

2. D'après la question précédente, la suite (u_n) est :
   - décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   - minorée par 1 (car $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

   On en déduit que :
   $$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

3. La suite (u_n) est définie par la relation de récurrence :
   $$u_{n+1} = f(u_n)$$
   Or on a vu, dans la question précédente, que cette suite converge vers une limite l. Et comme la fonction f est continue sur $[0\,;+\infty[$, par passage à la limite dans la relation précédente, on a :
   $$l = f(l)$$
   Autrement dit, l est solution de l'équation $f(x) = x$. Et d'après la question 3 de la partie A, cette équation admet pour unique solution $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit donc que :
   $$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

4. (a) La commande `seuil(2)` renvoie le premier indice à partir duquel l'écart entre u_n et ℓ est strictement inférieur à 10^{-2}. On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $u_4 - \ell \approx 0{,}022 > 0{,}01$
- $u_5 - \ell \approx 0{,}007 < 0{,}01$

C'est donc à partir de $n = 5$ que $|u_n - \ell| < 0{,}02$. La valeur renvoyée par `seuil(2)` est donc :

$$\boxed{5}$$

(b) Cela signifie que c'est à partir de u_9 que l'écart entre les termes de la suite et sa limite devient strictement plus petit que 10^{-4}. Autrement dit :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 9,\ |u_n - \ell| < 0{,}0001}$$

Commentaires

- Dans la question 1, on aurait également pu dire que la fonction f était croissante comme composée de fonctions croissantes. En effet f est la composée des fonctions $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ et ces deux fonctions sont croissantes.
- Dans la question 4a de la partie B, on n'est pas obligé de justifier. On peut programmer le script à l'aide de la calculatrice et répondre simplement « En programmant le script, on obtient que la commande `seuil(2)` renvoie la valeur `5` ».

SUJET 5

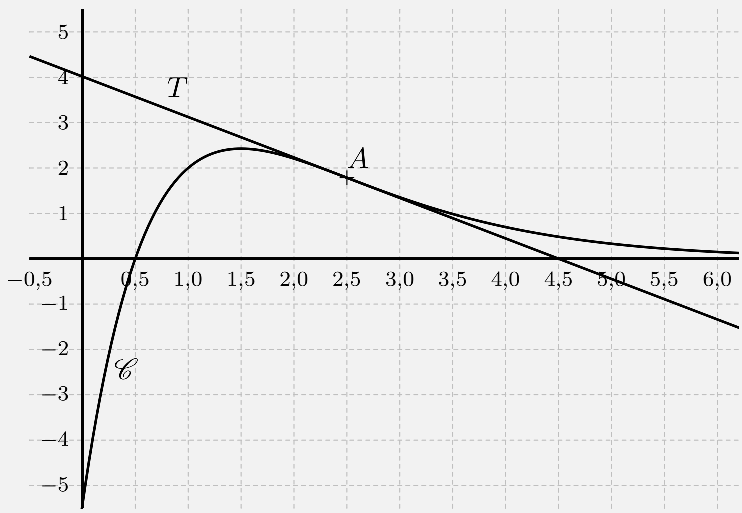
ASIE - 10 JUIN 2024

5.1 Association de courbes

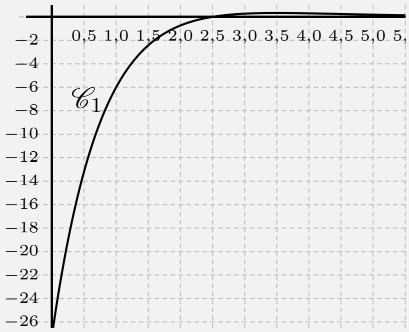
Énoncé

Partie A

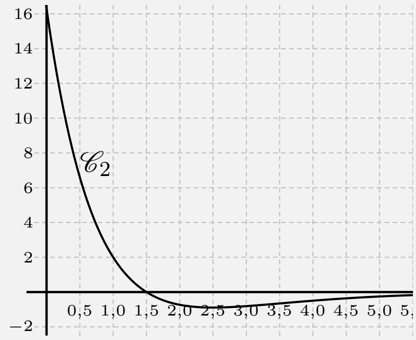
On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous. La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}$ au point A ?
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.
   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente. Ce choix sera justifié.

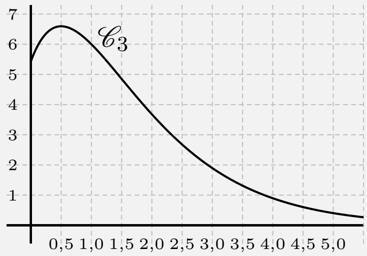


Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

4. La courbe $\mathscr{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\,;\,+\infty[$, d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

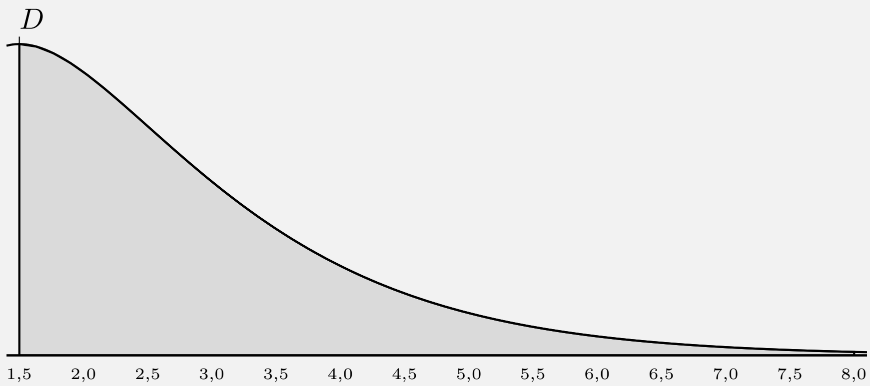
Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ est définie par $f(x) = (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$.

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f
   (a) Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}$.
   (b) Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   (c) Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.
2. On considère une fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.
   (a) Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
   (b) On admet que $F(x) = (-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$. En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.
   Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}\,;\,8\right]$.
   L'unité de longueur est le mètre.



(a) Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.

(b) La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur. Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de 0,8 m^2, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.

Correction
Partie A

1. Le tableau de variations de f semble être le suivant :

x	0		1,5		5
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

2. Au point A, la courbe $\mathscr{C}$ semble traverser sa tangente. On peut donc conjecturer que :

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C} \text{ semble présenter un point d'inflexion en } A}$$

3. La fonction f est croissante sur $[0\,;\,1{,}5]$ et décroissante sur $[1{,}5\,;\,+\infty[$, sa fonction dérivée est donc positive sur $[0\,;\,1{,}5]$ et négative sur $[1{,}5\,;\,+\infty[$. On en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{C}_2 \text{ est la courbe représentative de } f'}$$

La fonction f est concave sur $[0\,;\,2{,}5]$ et convexe sur $[2{,}5\,;\,+\infty[$, sa fonction dérivée seconde est donc négative sur $[0\,;\,2{,}5]$ et positive sur $[2{,}5\,;\,+\infty[$. On en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{C}_1 \text{ est la courbe représentative de } f''}$$

4. La fonction f est négative sur $[0\,;\,0{,}5]$ et positive sur $[0{,}5\,;\,+\infty[$ donc si F est une primitive de f alors F est décroissante sur $[0\,;\,0{,}5]$ et croissante sur $[0{,}5\,;\,+\infty[$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C}_3 \text{ ne peut pas être la courbe d'une primitive de } f}$$

Partie B

1.(a) La fonction f est dérivable, comme produit de fonctions dérivables, sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times \mathrm{e}^{-x+1} + (4x-2) \times (-\mathrm{e}^{-x+1}) \\ &= 4\mathrm{e}^{-x+1} - (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1} \\ &= (4-4x+2)\mathrm{e}^{-x+1} \\ &= (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}}$$

(b) Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-4x+6$. On a alors le tableau :

x	0		$1{,}5$		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-2\mathrm{e}$	$\nearrow$	$\dfrac{4}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\searrow$	0

(c) La fonction f' est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4 \times \mathrm{e}^{-x+1} + (-4x+6) \times (-\mathrm{e}^{-x+1}) \\ &= (-4+4x-6)\mathrm{e}^{-x+1} \\ &= (4x-10)\mathrm{e}^{-x+1} \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(4x-10)$. On a alors le tableau :

x	0		$2{,}5$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point d'abscisse 2,5 est un point d'inflexion}}$$

2.(a) La fonction F est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= a\mathrm{e}^{-x+1} + (ax+b) \times (-\mathrm{e}^{-x+1}) \\ &= (a-ax-b)\mathrm{e}^{-x+1} \\ &= (-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x+1} \end{aligned}$$

On veut que $F'(x) = f(x)$, on a alors, par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -a = 4 \\ a - b = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -4 \\ -4 - b = -2 \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{\begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[F(x)\Big]_{\frac{3}{2}}^{8} \\ &= \Big[(-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}\Big]_{\frac{3}{2}}^{8} \\ &= (-4\times 8 - 2)\mathrm{e}^{-8+1} - \left(-4\times\frac{3}{2} - 2\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1} \\ &= -34\mathrm{e}^{-7} + 8\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I = -34\mathrm{e}^{-7} + 8\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 4{,}82}$$

3.(a) On a $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 2{,}43$. La hauteur du point de départ D est donc de :

$$\boxed{2{,}43 \text{ mètres}}$$

(b) La surface, en m^2, du mur est donnée par l'intégrale calculée dans la question précédente, elle est donc d'environ $4{,}82\ \mathrm{m}^2$. Elle souhaite en couvrir 75 %, soit $4{,}82 \times 0{,}75 \approx 3{,}62\ \mathrm{m}^2$. Une bombe aérosol couvre $0{,}8\ \mathrm{m}^2$ et $\frac{3{,}62}{0{,}8} \approx 4{,}5$. Il faudra donc :

$$\boxed{5 \text{ bombes}}$$

Commentaires

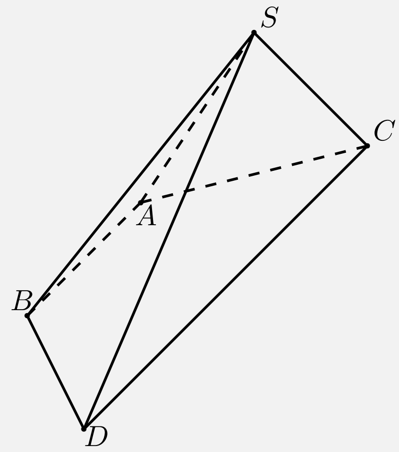
- Dans la question 1b de la partie B, on demande le tableau de variations complet, il faut donc calculer les images. Détaillons leurs calculs :
  - → $f(0) = (4\times 0 - 2)\mathrm{e}^1 = -2\mathrm{e}$
  - → $f(1{,}5) = (4\times 1{,}5 - 2)\mathrm{e}^{-1{,}5+1} = 4\mathrm{e}^{-0{,}5} = \frac{4}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

5.2 Pyramide à base trapézoïdale

Énoncé

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(0\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,,\,\overrightarrow{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A(3\,;\,-1\,;\,1)$, $B(4\,;\,-1\,;\,0)$, $C(0\,;\,3\,;\,2)$, $D(4\,;\,3\,;\,-2)$ et $S(2\,;\,1\,;\,4)$.

Dans cet exercice on souhaite montrer que $SABDC$ est une pyramide à base $ABDC$ trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. (a) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
   (b) Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.
   On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
3. (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(2\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
   (d) On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC). Montrer que le point I a pour coordonnées $I\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$, puis montrer que $SI = 2$ cm.
4. (a) Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées $H(3\,;\,3\,;\,-1)$ et montrer que $HB = 3\sqrt{2}$ cm.
   (b) Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze $ABDC$.
   On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathscr{A} = \frac{b+B}{2} \times h$$

   où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.
5. Déterminer le volume de la pyramide $SABDC$.
   On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ d'une pyramide est donné par la formule

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \textit{aire de la base} \times \textit{hauteur}$$

Correction

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc :

$$\boxed{\text{Les points } A,\ B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$$

2.(a) On a, de plus, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$. On peut alors remarquer que :

$$\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et donc que :

$$\boxed{\text{Les points } A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ sont coplanaires}}$$

(b) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. On en déduit que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et donc que :

$$\boxed{\text{Le quadrilatère } ABDC \text{ est un trapèze de bases } [AB] \text{ et } [CD]}$$

3.(a) On a :
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times 1 + 1\times 0 + 2\times(-1) = 2-2 = 0$
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times(-3) + 1\times 4 + 2\times 1 = -6+4+2 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal au plan } (ABC)}$$

(b) Le plan (ABC) admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$2x + y + 2z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point A appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, soit $2\times 3 - 1 + 2\times 1 + d = 0$. On a donc $7 + d = 0$ d'où $d = -7$. Le plan (ABC) admet donc pour équation cartésienne :

$$\boxed{2x + y + 2z - 7 = 0}$$

(c) La droite Δ passe par le point $S(2\,;\,1\,;\,4)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}} \quad t \in \mathbb{R}$$

(d) On injecte les expression de la représentation paramétrique de Δ dans l'équation cartésienne du plan (ABC) :

$$\begin{aligned} 2(2+2t)+1+t+2(4+2t)-7=0 &\iff 4+4t+1+t+8+4t-7=0 \\ &\iff 9t=-6 \\ &\iff t=-\frac{6}{9} \\ &\iff t=-\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Le point I est donc le point de paramètre $t=-\dfrac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique de Δ, c'est-à-dire le point de coordonnées :

$$\left(2+2\times\left(-\frac{2}{3}\right)\ ;\ 1+\left(-\frac{2}{3}\right)\ ;\ 4+2\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$$

Soit :

$$\boxed{I\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} SI &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{8}{3}-4\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{36}{9}} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{SI=2}$$

4.(a) La droite (CD) passe par le point $C(0\,;3\,;2)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x=4t' \\ y=3 \\ z=2-4t' \end{cases}} \quad t\in\mathbb{R}$$

On peut alors remarquer que le point H appartient à la droite (CD) car c'est le point de paramètre $t'=\dfrac{3}{4}$. De plus, on a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CD}=1\times4+(-4)\times0+1\times(-4)=0$.

La droite (HB) est donc orthogonale à la droite (CD). On a donc montré que :

$$\boxed{H(3\,;\,3\,;\,-1) \text{ est le projeté orthogonal de } B \text{ sur } (CD)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
HB &= \sqrt{(4-3)^2 + (-1-3)^2 + (0-(-1))^2} \\
&= \sqrt{1^1 + (-4)^2 + 1^2} \\
&= \sqrt{1+16+1} \\
&= \sqrt{18} \\
&= \sqrt{9 \times 2} \\
&= 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{HB = 3\sqrt{2}}$$

(b) On a $AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $CD = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. L'aire du trapèze $ABDC$ est alors :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_{ABDC} &= \frac{AB + CD}{2} \times HB \\
&= \frac{\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} \\
&= \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} \\
&= \frac{5 \times 2 \times 3}{2} \\
&= 15
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{A}_{ABDC} = 15}$$

5. Pour calculer le volume $\mathscr{V}_{SABDC}$ de la pyramide $SABDC$, on utilise la base $ABCD$ et la hauteur correspondante SI. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_{SABDC} &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABDC} \times SI \\
&= \frac{1}{3} \times 15 \times 2 \\
&= 10
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{V}_{SABDC} = 10}$$

Commentaires

- Dans la question 2a, pour montrer que les vecteurs sont coplanaires, j'ai trouvé une relation « à vue d'œil » en remarquant qu'une des coordonnées était nulle donc il n'y avait pas trop le choix. On aurait également pu considérer deux réels α et β et résoudre un système :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} &\iff \begin{cases}\alpha - 3\beta = 1\\ 4\beta = 4\\ -\alpha + \beta = -3\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\alpha - 3 = 1\\ \beta = 1\\ -\alpha + 1 = -3\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\alpha = 4\\ \beta = 1\\ \alpha = 4\end{cases}\end{aligned}$$

  Les valeurs $\alpha = 4$ et $\beta = 3$ conviennent, d'où la relation.

- Dans la question 3d, on aurait pu simplement vérifier que les coordonnées du point I vérifiaient à la fois l'équation cartésienne du plan (ABC) et la représentation paramétrique de la droite Δ.

5.3 Sensibilité et spécificité d'un test

Énoncé

Dans la revue Lancet Public Health, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.
Source : https ://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667(21)00064-5/fulltext

On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
   On note I l'événement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
   Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?
2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   (b) Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

(c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

(d) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

(e) Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0{,}9$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.
Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.
Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.

La sensibilité d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai positif).

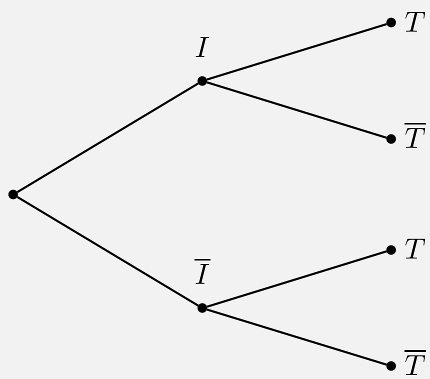
La spécificité d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai négatif).

Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

- Sa sensibilité est de 0,8.
- Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020. On note T l'événement « le test réalisé est positif ».

1. Compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :



2. Montrer que $P(T) = 0{,}05503$.
3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif ? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

Partie C

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité 0,8 et de spécificité 0,99.
Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de 29,44 %.
On choisit au hasard un individu de ce groupe ; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?

Correction

Partie A

1. D'après l'énoncé, la probabilité que l'individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 est :

$$\boxed{P(I) = 0{,}057}$$

2.(a) On répète 100 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est 0,057. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 100 \text{ et } p = 0{,}057}$$

(b) X suivant une loi binomiale, son espérance est $E(X) = n \times p = 100 \times 0{,}057$, soit :

$$\boxed{E(X) = 5{,}7}$$

Cela signifie que le nombre moyen de personnes ayant déjà été infectées sur un échantillon de 100 personnes et de 5,7.

(c) Il s'agit de calculer $P(X = 0)$. Or $P(X = 0) = (1 - 0{,}057)^{100} = 0{,}943^{100} \approx 0{,}0028$. La probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon est donc :

$$\boxed{P(X = 0) \approx 0{,}0028}$$

(d) Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 2)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon est :

$$\boxed{P(X \geqslant 2) \approx 0{,}9801}$$

(e) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $P(X \leqslant 8) \approx 0{,}88 < 0{,}9$
- $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}94 > 0{,}9$

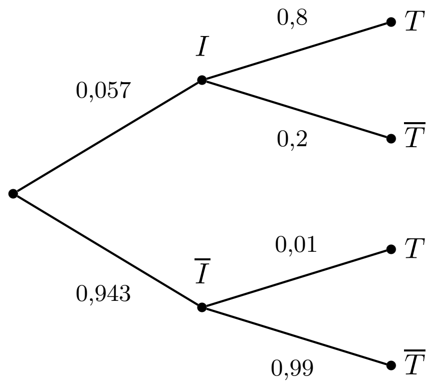
Le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0{,}9$ est donc :

$$\boxed{n = 9}$$

Cela signifie que l'on est sûr à plus de 90 % qu'il y a moins de 9 personnes infectées dans l'échantillon de 100 personnes.

Partie B

1. On complète l'arbre de la façon suivante :



2. Les événements I et $\overline{I}$ forment une partition de l'univers. On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(I) \times P_I(T) + P(\overline{I}) \times P_{\overline{I}}(T) \\ &= 0{,}057 \times 0{,}8 + 0{,}943 \times 0{,}01 \\ &= 0{,}05503 \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{P(T) = 0{,}05503}$$

3. Il s'agit de calculer $P_T(I)$:

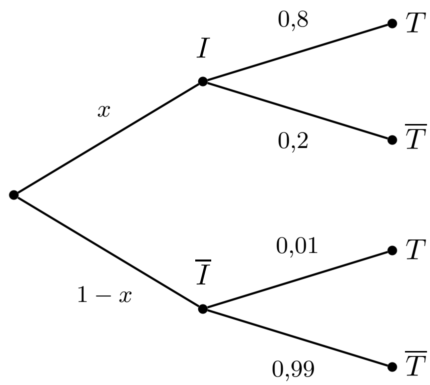
$$\begin{aligned} P_T(I) &= \frac{P(I \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0{,}057 \times 0{,}8}{0{,}05503} \\ &\approx 0{,}8286 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif est donc :

$$\boxed{P_T(I) \approx 0{,}8286}$$

Partie C

En prenant les mêmes notations que dans la partie B, on a maintenant $P(T) = 0{,}2944$.
Soit $x = P(I)$ la probabilité cherchée. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= x \times 0{,}8 + (1 - x) \times 0{,}01 \\ &= 0{,}8x + 0{,}01 - 0{,}01x \\ &= 0{,}79x + 0{,}01 \end{aligned}$$

Or $P(T) = 0{,}2944$, il s'agit alors de résoudre une équation :

$$\begin{aligned} 0{,}79x + 0{,}01 = 0{,}2944 &\iff 0{,}79x = 0{,}2844 \\ &\iff x = \frac{0{,}2844}{0{,}79} \\ &\iff x = 0{,}36 \end{aligned}$$

La probabilité que la personne ait déjà été infectée est donc :

$$\boxed{P(I) = 0{,}36}$$

Commentaires

- Dans la question 2c de la partie A, on aurait également pu utiliser directement la calculatrice pour calculer la probabilité demandée.
- Dans la question 2d de la partie A, on aurait pu passer au complémentaire :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - 0{,}943^{100} - 100 \times 0{,}057 \times 0{,}943^{99} \\ &\approx 0{,}9801 \end{aligned}$$

5.4 Un vrai-faux sur les suites

Énoncé

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. Affirmation 1 : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
2. On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n, on a $u_n \leqslant \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$.

   Affirmation 2 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
3. On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```
def terme(N):
    U=1
    for i in range(N):
        U=U+i
    return U
```

   Affirmation 3 : `terme(4)` renvoie la valeur 7.
4. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :
   - Prix A : il reçoit 1 000 euros par jour pendant 15 jours ;
   - Prix B : il reçoit 1 euro le 1er jour, 2 euros le 2e jour, 4 euros le 3e jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

   Affirmation 4 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = \displaystyle\int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x$.

   Affirmation 5 : La suite (v_n) est croissante.

Correction

1. **Affirmation 1 : Faux**
   Toute suite décroissante et minorée par 0 est convergente mais la limite n'est pas nécessairement 0. En effet, considérons la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
   $$u_n = 2 + \frac{1}{n}$$
   Cette suite est décroissante et minorée par 2, donc a fortiori minorée par 0. Et elle ne converge pas vers 0 mais vers 2.
2. **Affirmation 2 : Vrai**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{-9^n + 3^n}{7^n} = -\dfrac{9^n}{7^n} + \dfrac{3^n}{7^n} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n + \left(\dfrac{3}{7}\right)^n$.
   Or $\dfrac{9}{7} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{9}{7}\right)^n = +\infty$ et $-1 < \dfrac{3}{7} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{7}\right)^n = 0$. On en déduit que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{-9^n + 3^n}{7^n} = -\infty$$
   Et par le théorème de majoration $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. **Affirmation 3 : Vrai**
   La fonction `terme(4)` renvoie la valeur de $1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 7$.
4. **Affirmation 4 : Faux**
   - La valeur du prix A est égale à $1\,000 \times 15$, soit $15\,000$ euros.
   - La valeur S du prix B est égale à la somme des 15 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2. On a donc :
   $$S = 1 \times \frac{1 - 2^{15}}{1 - 2} = 32\,767$$
5. **Affirmation 5 : Vrai**
   Sur l'intervalle $[1\,; +\infty[$, la fonction ln est positive donc plus n est grand, plus l'intégrale est grande. La suite (v_n) est donc croissante.

Commentaires

- En Python, la commande « `for i in range(N)` » permet de faire varier `i` de 0 à $N - 1$.
- Dans la question 4, on peut remarquer que la valeur du prix B est plus de 2 fois plus élevée que celle du prix A. Elle dépasse déjà celle du prix A au bout de 14 jours.
- Dans la question 5, si l'on souhaite être plus précis, on peut écrire, pour tout $n \geqslant 1$:
  $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \int_1^{n+1} \ln x \,\mathrm{d}x - \int_1^n \ln x \,\mathrm{d}x \\ &= \int_n^{n+1} \ln x \,\mathrm{d}x \qquad \textit{(relation de Chasles)} \end{aligned}$$
  Et cette intégrale est positive car la fonction ln est positive sur $[n\,; n+1]$ et les bornes sont « dans l'ordre ». On a donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et on en déduit que la suite (v_n) est croissante.

SUJET 6

ASIE - 11 JUIN 2024

6.1 Une fonction auxiliaire et une suite récurrente

Énoncé

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - x\ln(x)$.
On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :
$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}$$
4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\,;+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\,;+\infty[$.
On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\,;+\infty[$.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de $f(x) = x$
On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g. Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n\ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. Justifier que la suite (u_n) converge.

On appelle l la limite de la suite (u_n) et on admet que l vérifie l'égalité $f(l) = l$.

3. Déterminer la valeur de l.

Correction
Partie A

1. • **Limite en 0 :**
   On a :
   $$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0 \quad \textit{(par croissances comparées)} \end{cases}$$
   • **Limite en $+\infty$:**
   Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a :
   $$f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$
   Et donc :
   $$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \textit{(par croissances comparées)} \end{cases}$$
2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$:
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) \\ &= 2x - (\ln(x) + 1) \\ &= 2x - \ln(x) - 1 \end{aligned}$$
   Soit :
   $$\boxed{f'(x) = 2x - \ln(x) - 1}$$
3. La fonction f' est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$:
   $$\begin{aligned} f''(x) &= 2 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x-1}{x} \end{aligned}$$
   Soit :
   $$\boxed{f''(x) = \frac{2x-1}{x}}$$
4. Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x - 1$. On en déduit le tableau :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	

Le minimum est atteint en $\dfrac{1}{2}$ et :

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 + \ln(2) - 1 = \ln(2)$$

5. D'après son tableau de variations, la fonction f' atteint son minimum en $\dfrac{1}{2}$ et ce minimum vaut $\ln(2)$. Or $\ln(2) \approx 0{,}69 > 0$ donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[}$$

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{g'(x) = \frac{x-1}{x}}$$

Or, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x - 1$. Et comme $g(1) = 1 - \ln(1) = 1$, on a le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\|$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 - x\ln(x) = x \\ &\iff x^2 - x\ln(x) - x = 0 \\ &\iff x\left(x - \ln(x) - 1\right) = 0 \\ &\iff x - \ln(x) - 1 = 0 \quad (\textit{car } x \neq 0) \\ &\iff x - \ln(x) = 1 \\ &\iff g(x) = 1 \end{aligned}$$

Or l'équation $g(x) = 1$ admet 1 pour unique solution donc l'équation $f(x) = x$ admet pour ensemble solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1\}}$$

Partie C

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et :
     $$u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) \approx 0{,}6$$
     On a donc bien $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :
     $$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
     On a alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$:
     $$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$$
     Soit :
     $$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$$
     Et comme $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx 0{,}6 \geqslant \dfrac{1}{2}$, on a, a fortiori :
     $$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$$
     La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
   - **Conclusion :**
     La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
     $$\boxed{\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1}$$
2. D'après la question précédente, la suite (u_n) est :
   - croissante (car $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)
   - majorée par 1 (car $u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

   On en déduit que :
   $$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$
3. On a vu, dans la question 2 de la partie B, que l'équation $f(x) = x$ admettait 1 pour unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$. Or l est solution de cette équation donc :
   $$\boxed{l = 1}$$

Commentaires

- Dans la question 2 de la partie B, on admet que l'équation $g(x) = 1$ admet 1 pour unique solution. On aurait tout de même pu le justifier à l'aide des variations de la fonction g. En effet, g est strictement décroissante sur $]0\,;\,1]$, strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$ et admet 1 pour minimum en 1. Elle est donc strictement supérieure à 1 pour tout $x \neq 1$.
- Dans la question 3 de la partie C, on admet que la limite l vérifie $f(l) = l$. Ce résultat est en fait un résultat du cours à connaître. On dit que l est un point fixe pour la fonction f.

6.2 Probabilité de gagner à un jeu vidéo

Énoncé

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.
Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas.
Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.
De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

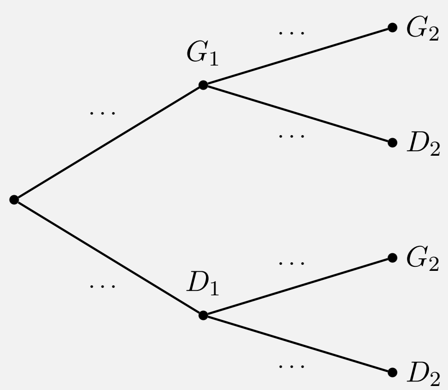
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les événements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

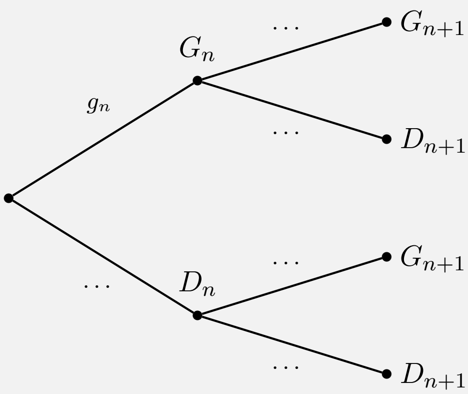
Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'événement G_n. On a donc $g_1 = 0{,}5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{G_1}(D_2)$?
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2.
4. Soit n un entier naturel non nul.

(a) Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



(b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $g_{n+1} = 0{,}5g_n + 0{,}2$.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0{,}4$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4$.
6. Étudier les variations de la suite (g_n).
7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0{,}4 \leqslant 0{,}001$.
9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0{,}4 + e$ où e est un nombre réel strictement positif.

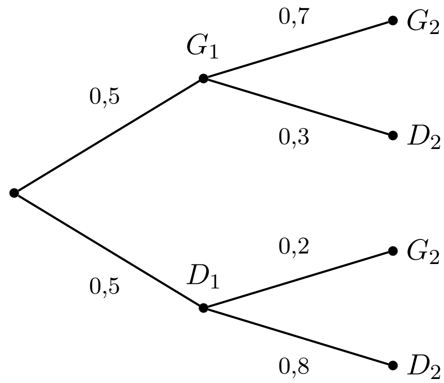
```python
def seuil(e):
    g=0.5
    n=1
    while ...:
        g=0.5*g+0.2
        n=...
    return (n)
```

Correction

1. Il s'agit de la probabilité que Léa perde la deuxième partie sachant qu'elle a gagné la première. Or lorsqu'elle gagne une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas donc elle la perd dans 30 % des cas. On a donc :

$$\boxed{P_{G_1}(D_2) = 0{,}3}$$

2. On complète l'arbre de la façon suivante :



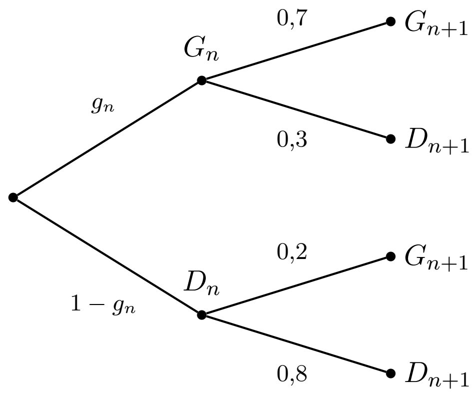
3. Il s'agit de calculer $P(G_2)$. Les événements G_1 et D_1 forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(D_1) \times P_{D_1}(G_2) \\ &= 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}45 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{g_2 = 0{,}45}$$

4.(a) On complète l'arbre de la façon suivante :



(b) Les événements G_n et D_n forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G_{n+1}) &= P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(G_{n+1}) \\ &= g_n \times 0{,}7 + (1 - g_n) \times 0{,}2 \\ &= 0{,}7g_n + 0{,}2 - 0{,}2g_n \\ &= 0{,}5g_n + 0{,}2 \end{aligned}$$

Soit, pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{g_{n+1} = 0{,}5g_n + 0{,}2}$$

5.(a) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= g_{n+1} - 0{,}4 \\ &= 0{,}5g_n + 0{,}2 - 0{,}4 \\ &= 0{,}5g_n - 0{,}2 \\ &= 0{,}5\left(g_n - 0{,}4\right) \\ &= 0{,}5v_n \end{aligned}$$

Et comme $v_1 = g_1 - 0{,}4 = 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison 0,5 et de 1}^{\text{er}} \text{ terme } v_1 = 0{,}1}$$

(b) D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 \times 0{,}5^{n-1}$, soit :

$$v_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1}$$

Et comme $v_n = g_n - 0{,}4$, on a $g_n = v_n + 0{,}4$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= 0{,}1 \times 0{,}5^n + 0{,}4 - \left(0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4\right) \\ &= 0{,}1 \times 0{,}5^n + 0{,}4 - 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} - 0{,}4 \\ &= 0{,}1 \times 0{,}5^n - 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} \\ &= 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1}(0{,}5 - 1) \\ &= 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} \times (-0{,}5) \\ &= -0{,}1 \times 0{,}5^n \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+1} - g_n < 0$ et donc que :

$$\boxed{\text{La suite } (g_n) \text{ est strictement décroissante}}$$

7. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(0{,}5^{n-1}\right) = 0$ car $-1 < 0{,}5 < 1$ donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} g_n = 0{,}4}$$

Cela signifie qu'à long terme, la probabilité que Léa gagne une partie sera proche de 0,4. Ou encore que Léa gagnera environ 40 % des parties.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} g_n - 0{,}4 \leqslant 0{,}001 &\iff 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4 - 0{,}4 \leqslant 0{,}001 \\ &\iff 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} \leqslant 0{,}001 \\ &\iff 0{,}5^{n-1} \leqslant 0{,}01 \\ &\iff \ln\left(0{,}5^{n-1}\right) \leqslant \ln(0{,}01) \\ &\iff (n-1)\ln(0{,}5) \leqslant \ln(0{,}01) \\ &\iff n - 1 \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)} \quad (\textit{car } \ln(0{,}5) < 0) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)} \approx 6{,}6$ donc $n-1 \geqslant 7$. On en déduit que le plus petit entier n tel que $g_n - 0{,}4 \leqslant 0{,}001$ est :

$$\boxed{n = 8}$$

9. On peut compléter l'algorithme de la façon suivante :

```
def seuil(e):
    g = 0.5
    n = 1
    while g > 0.4 + e :
        g = 0.5*g + 0.2
        n = n+1
    return (n)
```

Commentaires

- Dans la question 5a, plutôt que de factoriser par 0,5, on peut utiliser le fait que $g_n = v_n + 0{,}4$ et présenter de la façon suivante :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= g_{n+1} - 0{,}4 \\ &= 0{,}5g_n + 0{,}2 - 0{,}4 \\ &= 0{,}5g_n - 0{,}2 \\ &= 0{,}5(v_n + 0{,}4) - 0{,}2 \\ &= 0{,}5v_n + 0{,}2 - 0{,}2 \\ &= 0{,}5v_n \end{aligned}$$

Et on retrouve bien que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5.

6.3 Vrai-faux en vrac

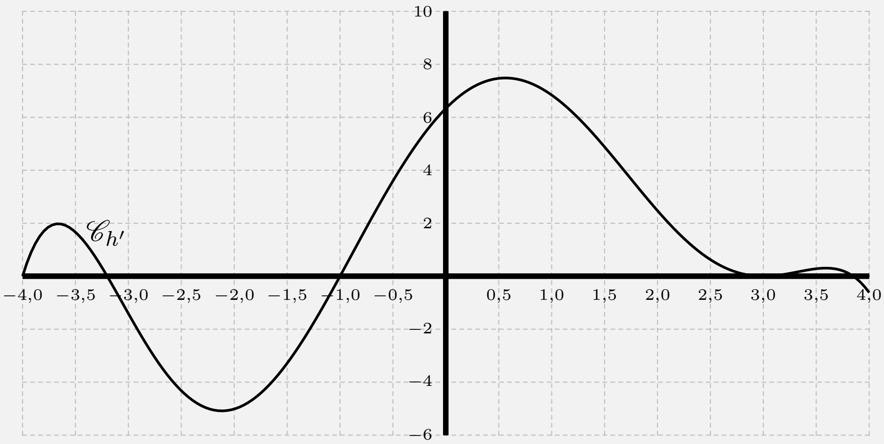
Énoncé

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante : pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} < u_n \leqslant \dfrac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}$.

   Affirmation 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

2. Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$.
   La représentation graphique $\mathscr{C}_{h'}$ de la fonction de sa fonction dérivée h' est donnée ci-dessous.



Affirmation 2 : La fonction h est convexe sur $[-1\,;\,3]$.

3. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).
Affirmation 3 : Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.
4. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.
Affirmation 4 : La fonction f est solution sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$xy' - y = x$$

Correction

1. **Affirmation 1 : Vrai**
On a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{6n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.
2. **Affirmation 2 : Faux**
On peut remarquer que, sur l'intervalle $[-1\,;\,3]$, la fonction dérivée h' est croissante puis décroissante. On en déduit que la fonction h est convexe puis concave.
3. **Affirmation 3 : Vrai**
   - Calculons d'abord le nombre total de codes possibles. Le nombre de possibilités pour le choix des 4 chiffres est égal au nombre de 4-uplets dans un ensemble à 10 éléments (les 10 chiffres compris entre 0 et 9). Il y en a donc $10^4 = 10\,000$. Le nombre de possibilités pour le choix des 2 lettres est égal au nombre de 2-uplets d'éléments distincts dans un ensemble à 3 éléments (les 3 lettres A, B et C). Il y en a donc $3 \times 2 = 6$. Le nombre de codes possibles est donc $10\,000 \times 6 = 60\,000$.
   - Déterminons maintenant le nombre de codes ne contenant aucun 0. Le nombre de possibilités pour le choix des 4 chiffres est égal au nombre de 4-uplets dans un ensemble à 9 éléments (les 9 chiffres compris entre 1 et 9). Il y en a donc $9^4 = 6\,561$ Le nombre de possibilités pour le choix des 2 lettres est égal au nombre de 2-uplets d'éléments distincts dans un ensemble à 3 éléments (les 3 lettres A, B et C). Il y en a donc $3 \times 2 = 6$. Le nombre de codes possibles ne contenant aucun 0 est donc $6\,561 \times 6 = 39\,366$.

- Finalement, le nombre de codes contenant au moins un 0 est égal à $60\,000 - 39\,366 = 20\,634$.

4. **Affirmation 4 : Vrai**
La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

On a alors, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} x \times f'(x) - f(x) &= x\left(\ln(x) + 1\right) - x\ln(x) \\ &= x\ln(x) + x - x\ln(x) \\ &= x \end{aligned}$$

Donc la fonction f est bien solution sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle $xy' - y = x$.

Commentaires

- Dans la question 1, j'ai utilisé le fait que la limite d'un quotient de suites polynomiales est égale au quotient des limites des termes de plus haut degré. On aurait également pu factoriser, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1} = \frac{n^2\left(3 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(6 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}}{6 + \frac{1}{n^2}}$$

  On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 + \dfrac{4}{n} + \dfrac{7}{n^2}\right) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(6 + \dfrac{1}{n^2}\right) = 6$.
  On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ par quotient.
- Dans la question 2, c'est la courbe de la fonction dérivée qui est donnée. Or ce sont les variations de la dérivée qui permettent de déterminer la convexité de la fonction de départ. Si l'on nous avait donné la courbe de la fonction dérivée seconde alors c'est son signe qu'il aurait fallu étudier afin de déterminer la convexité de la fonction de départ.
- Dans la question 3, lorsque dans la question figure le terme « au moins un », comme en probabilités, il est souvent plus simple de s'intéresser au complémentaire, c'est-à-dire à « aucun ».
- Dans la question 4, on ne sait pas résoudre l'équation différentielle donnée (car le coefficient devant y' dépend de x). Mais cela n'est pas grave car il s'agit ici uniquement de vérifier qu'une fonction est solution.

6.4 Aire du projeté d'un triangle

Énoncé

Dans un repère orthonormé $(0\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :

$$(P)\ :\ 2x+2y-3z+1=0$$

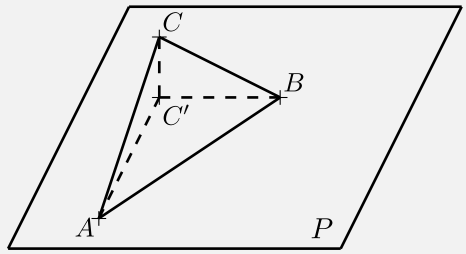
On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$A(1\,;\,0\,;\,1)\,,B(2\,;\,-1\,;\,1)\text{ et }C(-4\,;\,-6\,;\,5)$$

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).
2. Montrer que le point $C'(0\,;\,-2\,;\,-1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions $\begin{cases} H \in (AB) \\ (AB) \text{ et } (HC) \text{ sont orthogonales} \end{cases}$ Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont : $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\|\overrightarrow{HC}\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

Partie C

On admet que $HC'=\sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha=\widehat{CHC'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2. (a) Montrer que les droites $(C'H)$ et (AB) sont perpendiculaires.
   (b) Calculer S' l'aire du triangle ABC', on donnera la valeur exacte.
   (c) Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

Correction
Partie A

1. On a :
   - $2\times 1+2\times 0-3\times 1+1=2-3+1=0$ donc :

$$\boxed{\text{Le point } A \text{ appartient au plan } (P)}$$

   - $2\times 2+2\times(-1)-3\times 1+1=4-2-3+1=0$ donc :

$$\boxed{\text{Le point } B \text{ appartient au plan } (P)}$$

   - $2\times(-4)+2\times(-6)-3\times 5+1=-8-12-15+1=-34\neq 0$ donc :

$$\boxed{\text{Le point } C \text{ n'appartient pas au plan } (P)}$$

2. Il s'agit de montrer que le point C' appartient au plan (P) et que le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ est orthogonal au plan (P).
   - On a $2\times 0+2\times(-2)-3\times(-1)+1=-2+3-1=0$ donc le point C' appartient au plan (P).
   - On a $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}$ et le plan (P) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{CC'}=2\overrightarrow{n}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ est orthogonal au plan (P).

   On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point } C' \text{ est le projeté orthogonal du point } C \text{ sur le plan } (P)}$$

3. La droite (AB) passe par le point $A(1\,;0\,;1)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=1\end{cases}}\quad t\in\mathbb{R}$$

4. Le point H appartient à la droite (AB), il existe donc un réel t tel que $H(1+t\,;-t\,;1)$. On a alors $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-5-t\\-6+t\\4\end{pmatrix}$ et donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\text{ et }\overrightarrow{HC}\text{ sont orthogonaux} &\iff \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC}=0\\
&\iff 1\times(-5-t)+(-1)\times(-6+t)+0\times 4=0\\
&\iff -5-t+6-t=0\\
&\iff 2t=1\\
&\iff t=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Le point H est donc le point de paramètre $t = \dfrac{1}{2}$, soit :

$$\boxed{H\left(\frac{3}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,1\right)}$$

Partie B

1. On a :

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{HC}\| &= \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2 + 4^2} \\
&= \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{121}{4} + 16} \\
&= \sqrt{\frac{153}{2}}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{\frac{153}{2}}}$$

2. On a $AB = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $[CH]$ est la hauteur issue de C dans le triangle ABC. On a donc :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{AB \times CH}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{153}{2}}}{2} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{153}}{\sqrt{2}}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{153}}{2}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{S = \frac{3\sqrt{17}}{2}}$$

Partie C

1. Dans le triangle CHC', rectangle en C', on a :

$$\cos\left(\widehat{CHC'}\right) = \frac{HC'}{HC} = \frac{\sqrt{\frac{17}{2}}}{\sqrt{\frac{153}{2}}} = \frac{\sqrt{17} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{153}} = \sqrt{\frac{17}{153}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

Soit :

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{3}}$$

2.(a) On a $\overrightarrow{C'H}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{C'H}.\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\times 1 + \frac{3}{2}\times(-1) + (-2)\times 0 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{C'H}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc orthogonaux. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Les droites } (C'H) \text{ et } (AB) \text{ sont perpendiculaires}}$$

(b) Dans le triangle ABC', HC' est la hauteur issue de C'. On a donc :

$$S' = \frac{AB\times HC'}{2} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{17}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Soit :

$$\boxed{S' = \frac{\sqrt{17}}{2}}$$

(c) On peut remarquer que :

$$\boxed{S' = S\times\cos(\alpha)}$$

Commentaires

- Dans la question 2, on aurait également pu déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par C orthogonalement au plan (P) puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de cette droite avec le plan (P).
- Le point H, dont on a déterminé les coordonnées dans la question 4 de la partie A, est en fait le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
- Dans la question 2c de la partie C, on peut tout simplement remarquer, d'après nos calculs que $S' = \frac{1}{3}S$ et comme $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$, on a $S' = S\times\cos(\alpha)$. Mais, d'une manière générale, on a $\cos(\alpha) = \frac{HC'}{HC}$ donc $HC' = HC\times\cos(\alpha)$ et donc :

$$\begin{aligned} S' &= \frac{AB\times HC'}{2}\\ &= \frac{AB\times HC\times\cos(\alpha)}{2}\\ &= \frac{AB\times HC}{2}\times\cos(\alpha)\\ &= S\times\cos(\alpha)\end{aligned}$$

SUJET 7

MÉTROPOLE - 19 JUIN 2024

7.1 Une fonction et une suite dans un vrai-faux

Énoncé (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
   Affirmation 1 :
   L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   Affirmation 2 :
   La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}$.
2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$
   De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.
   Affirmation 3 :
   La suite (v_n) converge vers un nombre réel l appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

   On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.
   Affirmation 4 :
   Pour tout entier naturel n, on a alors : $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

Correction

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$f(x) = 5 \times \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$
   Et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc :
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$
   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc la droite d'équation $y = 0$ (soit l'axe des abscisses) comme asymptote horizontale en $+\infty$.

Affirmation 2 : Vrai
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\mathrm{e}^{-x} + 5x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (5-5x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Et donc, pour tout $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) &= (5-5x)\mathrm{e}^{-x} + 5x\mathrm{e}^{-x} \\ &= 5\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

La fonction f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}$.

2. **Affirmation 3 : Faux**
Soit (u_n) la suite constante égale à 1, (w_n) la suite constante égale à -1 et (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = (-1)^n$. Toutes les hypothèses sont vérifiées mais la suite (v_n) ne converge pas. On a donc trouvé un contre-exemple, ce qui prouve que l'affirmation est fausse.

Affirmation 4 : Vrai
La suite (u_n) étant croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_0 \leqslant u_n$. De même, la suite (w_n) étant décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_0 \geqslant w_n$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_0$$

Commentaires

- Pour l'affirmation 1, la formule de croissances comparées du cours est la suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

Autrement dit, l'exponentielle l'emporte sur x. Ici on est en présence du rapport inverse donc la limite est 0. Si l'on souhaite se ramener vraiment à la formule du cours, on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$$

Et comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, on en déduit $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

- Pour l'affirmation 2, il ne faut pas chercher à résoudre l'équation différentielle mais il faut simplement vérifier que f est une solution. Il suffit alors de remplacer y par f et montrer que l'égalité est vérifiée.
- Pour l'affirmation 3, on est tenté de penser au théorème des gendarmes mais les deux suites « qui encadrent » n'ont pas la même limite. Cela laisse donc trop d'espace à la suite qui est encadrée et ne la contraint pas à converger.

7.2 Probabilité de satisfaction

Énoncé (5 points)

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30 % des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75 % pour les clients sur internet ;
- 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80 % pour les clients en grande surface.

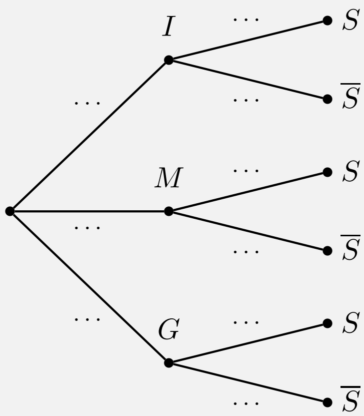
On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

On définit les événements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un événement quelconque, on notera $\overline{A}$ son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.
2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.
3. Démontrer que $P(S) = 0{,}8$.
4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.



5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.
7. Dans les deux questions 7a et 7b qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.
   Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2.

   La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

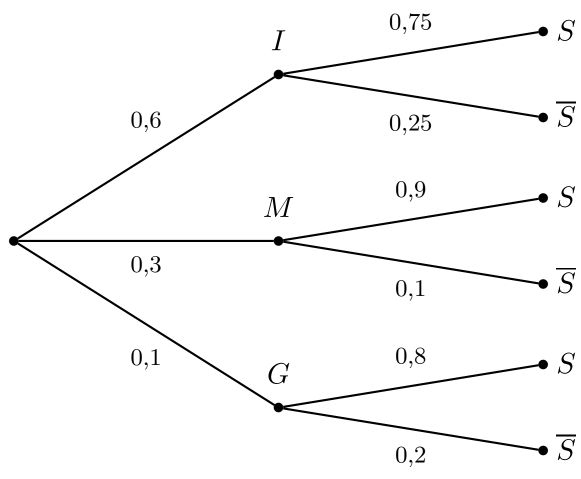
   On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :
   - L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
   - L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

   (a) Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

   (b) Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\dfrac{2}{3}$.

Correction

1. On complète l'arbre de la façon suivante :



2. Il s'agit de calculer $P(I \cap S)$:

$$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$$

La probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle est donc :

$$\boxed{P(I \cap S) = 0{,}45}$$

3. Les événements I, M et G forment une partition de l'univers. On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(I) \times P_I(S) + P(M) \times P_M(S) + P(G) \times P_G(S) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}75 + 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}8 \\ &= 0{,}45 + 0{,}27 + 0{,}08 \\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{P(S) = 0{,}8}$$

4. Il s'agit de calculer $P_S(I)$:

$$P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}45}{0{,}8} \approx 0{,}563$$

La probabilité que le client ait effectué son achat sur internet sachant qu'il est satisfait de son achat est donc :

$$\boxed{P_S(I) \approx 0{,}563}$$

5.(a) On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à 0,8. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = 0{,}8}$$

(b) On obtient, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'au moins 25 clients soient satisfaits est :

$$\boxed{P(X \geqslant 25) \approx 0{,}428}$$

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y = n) = 1 - 0{,}8^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant n-1) \geqslant 0{,}99 &\iff 1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}99 \\ &\iff 0{,}8^n \leqslant 0{,}01 \\ &\iff \ln\left(0{,}8^n\right) \leqslant \ln(0{,}01) \quad \textit{(croissance de } \ln) \\ &\iff n\ln(0{,}8) \leqslant \ln(0{,}01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \qquad \textit{(car } \ln(0{,}8) < 0) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \approx 20{,}6$ donc la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99 est :

$$\boxed{n = 21}$$

7.(a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$$

Et comme les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes :

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$$

Soit :

$$\boxed{E(T) = 7} \quad \text{et} \quad \boxed{V(T) = 3}$$

(b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$. Son événement contraire est $(T < 5) \cup (T > 9)$ ou encore, comme T ne prend que des valeurs entières, $(T \leqslant 4) \cup (T \geqslant 10)$. Cet événement s'écrit également $(|T - 7| \geqslant 3)$. Or , d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(|T - E(T)| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{V(T)}{3^2}$$

Soit :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{3}{3^2}$$

Et donc :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{1}{3}$$

Et donc, en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|T - 7| < 3|\right) \geqslant 1 - \frac{1}{3}$$

Soit :

$$P\left(4 < T < 10\right) \geqslant \frac{2}{3}$$

Et donc, la probabilité que le client reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est :

$$\boxed{P\left(5 \leqslant T \leqslant 9\right) \geqslant \frac{2}{3}}$$

Commentaires

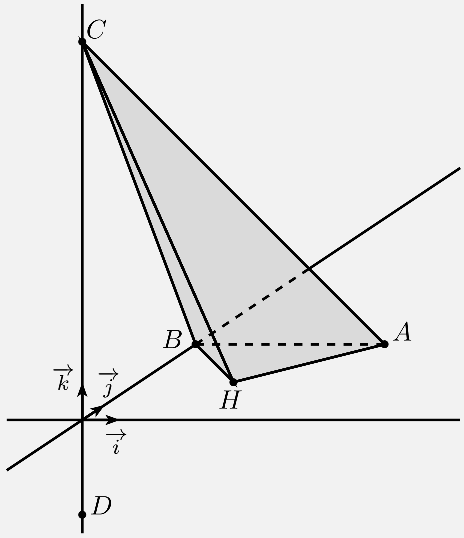
- Dans la question 6, plutôt que d'introduire une variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits, on aurait pu introduire une variable aléatoire égale au nombre de clients qui ne sont pas satisfaits. Cette variable aléatoire, Z, suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}2$ et il s'agit de résoudre $P(Z \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$, soit $1 - P(Z = 0) \geqslant 0{,}99$. Et comme $P(Z = 0) = 0{,}8^n$, on retombe sur la même inéquation.
- Dans la question 7a, la variance de la somme est égale à la somme des variances car les variables aléatoires sont indépendantes. Il ne faut donc pas oublier de donner cet argument, ce qui n'est pas nécessaire pour l'espérance (la formule est toujours vraie).
- Dans la question 7b, on souhaite minorer une probabilité. Pour cela, on majore la probabilité de l'événement contraire. En effet, si $P(\overline{A}) \leqslant p$ alors $P(A) \geqslant 1 - p$.

7.3 Un volume et une distance

Énoncé (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$.

On considère les points $A(5\,;\,5\,;\,0)$, $B(0\,;\,5\,;\,0)$, $C(0\,;\,0\,;\,10)$ et $D\left(0\,;\,0\,;\,-\dfrac{5}{2}\right)$.



1.(a) Montrer que $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

(b) En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

2. On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \dfrac{5}{2}t \\ y = 5 - \dfrac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

(a) On admet que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,0\right)$.

(b) Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3.(a) Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

(b) En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\dfrac{25}{4}$.

4.(a) Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C.

(b) En déduire le volume du tétraèdre $ABCH$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$ *où* $\mathscr{B}$ *est l'aire d'une base et* h *la hauteur relative à cette base.*

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

Correction

1.(a) On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ et donc :

- $\vec{n_1}.\overrightarrow{CA} = 1 \times 5 + (-1) \times 5 + 0 \times (-10) = 5 - 5 + 0 = 0.$

- $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CD} = 1 \times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times \left(-\dfrac{25}{2}\right) = 0.$

Le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD). On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{n_1} \text{ est normal au plan } (CAD)}$$

(b) D'après la question précédente, le plan (CAD) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0$$

De plus, le point $C(0\,;\,0\,;\,10)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, soit $0 - 0 + d = 0$ et donc $d = 0$. Le plan (CAD) a donc pour équation cartésienne :

$$\boxed{x - y = 0}$$

2.(a) On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ dans l'équation cartésienne de (CAD) :

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0 &\iff \frac{5}{2}t - 5 + \frac{5}{2}t = 0 \\ &\iff 5t - 5 = 0 \\ &\iff 5t = 5 \\ &\iff t = 1 \end{aligned}$$

Le point H est donc le point de paramètre $t = 1$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$, soit :

$$\boxed{H\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)}$$

(b) Le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$ car c'est le point de paramètre $t = 0$ dans la représentation paramétrique précédente. Et la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (CAD) car elle est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n_1}$, normal au plan (CAD).

On en déduit que :

$$\boxed{H \text{ est le projeté orthogonal de } B \text{ sur le plan } (CAD)}$$

3.(a) On a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc :

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HA} = -\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} + 0 \times 0 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{4} = 0$$

Les vecteur $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HA}$ sont donc orthogonaux. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le triangle } ABH \text{ est rectangle en } H}$$

(b) On a :

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

De même, $HA = \sqrt{\frac{25}{2}}$ et comme le triangle ABH est rectangle en H, son aire est :

$$\mathscr{A}_{ABH} = \frac{HA \times HB}{2} = \frac{\sqrt{\frac{25}{2}} \times \sqrt{\frac{25}{2}}}{2} = \frac{\frac{25}{2}}{2} = \frac{25}{4}$$

L'aire du triangle ABH est donc bien :

$$\boxed{\mathscr{A}_{ABH} = \frac{25}{4}}$$

4.(a) On a $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ et donc :

- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HB} = 0 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\frac{5}{2}\right) + (-10) \times 0 = 0.$
- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HA} = 0 \times \left(\frac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\frac{5}{2}\right) + (-10) \times 0 = 0.$

La droite (CO) est donc orthogonale au plan (ABH), on en déduit que :

$$\boxed{(CO) \text{ est la hauteur issue de } C \text{ dans le tétraèdre } ABCH}$$

(b) Le volume du tétraèdre $ABCH$ est donc :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_{ABCH} &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABH} \times CO \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 \\ &= \frac{25 \times 10}{3 \times 4} \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{125}{6}}$$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC.
Or $BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et $BC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.
Et comme le triangle ABC est rectangle en B, on a :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{BA \times BC}{2} = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \frac{25\sqrt{5}}{2} \times h = \frac{25\sqrt{5}}{6} \times h$$

Et d'autre part, d'après la question précédente $\mathscr{V}_{ABCH} = \dfrac{125}{6}$ d'où :

$$\frac{25\sqrt{5}}{6} \times h = \frac{125}{6}$$

Et donc :

$$h = \frac{125}{6} \times \frac{6}{25\sqrt{5}}$$

Finalement, la distance du point H au plan (ABC) est :

$$\boxed{h = \sqrt{5}}$$

Commentaires

- Dans la question 2a, au lieu de déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (CAD), on pouvait simplement vérifier qu'il s'agissait du point H. Il suffit alors de montrer que :
  - ➝ Le point H appartient au plan (ABC).
  - ➝ La droite (BH) est orthogonale au plan (ABC).
- Dans la question 5, l'idée est d'exprimer de deux façons une même quantité (ici le volume du tétraèdre) afin d'en déduire une troisième quantité (ici une distance). Un tétraèdre ayant 4 faces, son volume peut s'exprimer de 4 façons différentes.
- Détaillons la simplification de l'expression de h dans la question 5 :

$$\begin{aligned} h &= \frac{125}{6} \times \frac{6}{25\sqrt{5}} \\ &= \frac{5 \times \cancel{25} \times \cancel{6}}{\cancel{6} \times \cancel{25} \times \sqrt{5}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5} \times \cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

7.4 Un calcul d'aire difficile

Énoncé (6 points)

Partie A : étude de la fonction f.

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{2}\ln x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. (a) Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (b) Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.
   (c) Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.
   (d) Étudier la convexité de f sur $]0\,;+\infty[$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,;+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1\,;2]$.
   (b) Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in\,]0\,;+\infty[$.
   (c) Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g.

La fonction g est définie sur $]0\,;1]$ par $g(x) = -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln x$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in\,]0\,;1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. (a) Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.
   (b) On admet le tableau de signes suivant :

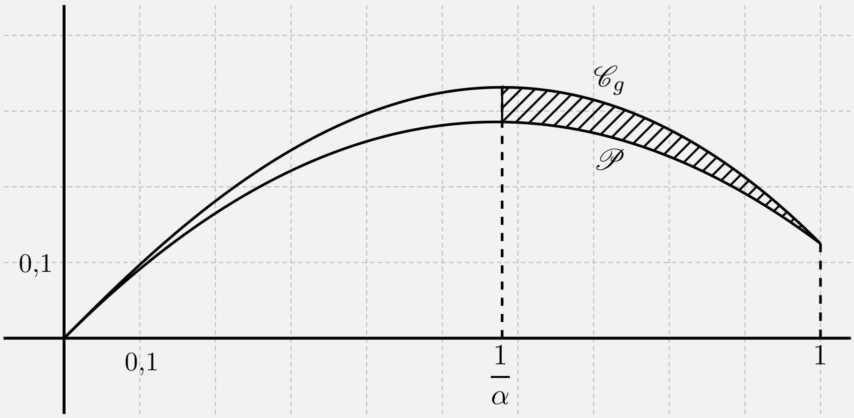
x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$		$+$	0	$-$	

   En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\,;1]$.
   Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ;
- La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\dfrac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$, et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

1.(a) Justifier la position relative des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

(b) Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

(c) En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathscr{A}$.

Correction

Partie A

1.(a) On a :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}(x-2) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}\ln(x)\right) = -\infty \end{cases}$$

Et :

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty}(x-2) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{2}\ln(x)\right) = +\infty \end{cases}$$

(b) La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{1}{2x} \\ &= \frac{2x+1}{2x} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x+1}{2x}}$$

(c) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a $2x+1>0$ et $2x>0$ donc $f'(x)>0$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[}$$

(d) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2\times 2x-(2x+1)\times 2}{(2x)^2} \\ &= \frac{4x-4x-2}{4x^2} \\ &= \frac{-2}{4x^2} \\ &= \frac{-1}{2x^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x\in\,]0\,;+\infty[$, $2x^2>0$ donc $f''(x)<0$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est concave sur }]0\,;+\infty[}$$

2.(a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante.
De plus $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Or $0\in\,]-\infty\,;+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$. De plus, on a $f(1)=-1<0$ et $f(2)=\dfrac{1}{2}\ln(2)>0$ donc :

$$\boxed{1<\alpha<2}$$

(b) La fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et elle s'annule en α. On en déduit le tableau de signes :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	||	$-$	0	$+$	

(c) On sait que $f(\alpha)=0$. Or :

$$\begin{aligned} f(\alpha)=0 &\iff \alpha-2+\frac{1}{2}\ln(\alpha)=0 \\ &\iff \frac{1}{2}\ln(\alpha)=2-\alpha \\ &\iff \ln(\alpha)=2(2-\alpha) \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\ln(\alpha)=2(2-\alpha)}$$

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et, pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x \\ &= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) \end{aligned}$$

Et d'autre part, pour tout $x \in]0\,;\,1]$:

$$\begin{aligned} xf\left(\frac{1}{x}\right) &= x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= 1 - 2x + \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) \qquad \left(\textit{car } \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)\right) \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2.(a) Si $x \in \left]0\,;\,\frac{1}{\alpha}\right[$ alors $\frac{1}{x} \in]\alpha\,;\,+\infty[$ donc, d'après le tableau de signes de f :

$$\boxed{f\left(\frac{1}{x}\right) > 0}$$

(b) On a vu que pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$. On en déduit le tableau :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
x		$+$		$+$	
$f\left(\frac{1}{x}\right)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

Partie C

1.(a) Pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x)$$

Or, pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $\ln(x) \leqslant 0$ donc :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) \geqslant 0$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{C}_g \text{ est au-dessus de } \mathscr{P} \text{ sur }]0\,;\,1]}$$

(b) On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{x} \times \frac{1}{3}x^3 \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{3}x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} \times 1^3 \times \underbrace{\ln(1)}_{0} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}_{-\ln(\alpha)} - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \\
&= \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3} - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{\alpha^3}\right) \\
&= \frac{2(2-\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3} \qquad \textit{(car } \ln(\alpha) = 2(2-\alpha)\textit{)} \\
&= \frac{12 - 6\alpha - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3} \\
&= \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}}$$

(c) Sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{P}$ donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} -\frac{1}{4}x^2 \ln(x) \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x) \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}}$$

Commentaires

- Le fait que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ s'interprète graphiquement en disant que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) pour asymptote verticale.
- Lorsque l'on effectue une intégration par parties, on a tendance à dériver la fonction qui devient plus simple après dérivation et à « primitiver » celle qui ne se complique pas trop après « primitivation ». Cependant, pour intégrer par parties une expression de la forme $x^n \ln(x)$, il est intéressant de « primitiver » la fonction $x \mapsto x^n$ (même si cela semble compliquer les choses) et de dériver la fonction ln.

SUJET 8

MÉTROPOLE - 20 JUIN 2024

8.1 Probabilité de réussir à un examen

Énoncé (5 points)

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

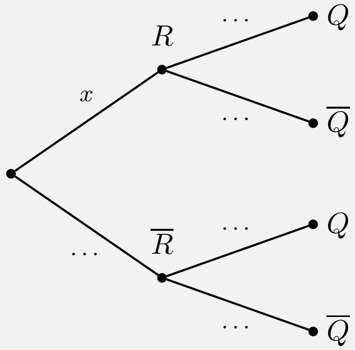
On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

On note R l'événement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'événement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

Pour un événement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son événement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}(\overline{Q})$.
2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
   (b) Montrer que $x = 0{,}9$.
3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?



4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de

paramètres (20 ; 0,615). La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?

5. On interroge au hasard dix étudiants.
Les variables aléatoires N_1, N_2, ..., N_{10} modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).
Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.
Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.

6. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.
   (a) Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
   (b) Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}47355$.
   (c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.

   « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

Correction

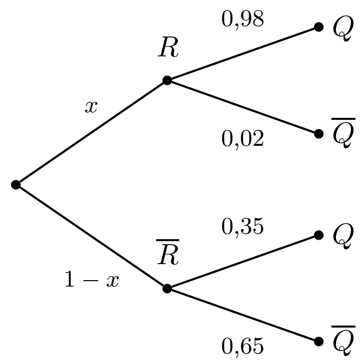
1. On sait que :
   - 91,7 % des étudiants ont répondu « oui » donc :

$$\boxed{P(Q) = 0{,}917}$$

   - 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » donc :

$$\boxed{P_{\overline{R}}(\overline{Q}) = 0{,}65}$$

2.(a) On complète l'arbre de la façon suivante :



(b) Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(Q) &= P(R) \times P_R(Q) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(Q)\\ &= x \times 0{,}98 + (1-x) \times 0{,}35\\ &= 0{,}98x + 0{,}35 - 0{,}35x\\ &= 0{,}63x + 0{,}35\end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé, on sait que $P(Q) = 0{,}917$, il s'agit alors de résoudre une équation :

$$\begin{aligned} 0{,}63x + 0{,}35 = 0{,}917 &\iff 0{,}63x = 0{,}917 - 0{,}35 \\ &\iff 0{,}63x = 0{,}567 \\ &\iff x = \frac{0{,}567}{0{,}63} \\ &\iff x = 0{,}9 \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{x = 0{,}9}$$

3. Il s'agit de calculer $P_Q(R)$:

$$\begin{aligned} P_Q(R) &= \frac{P(R \cap Q)}{P(Q)} \\ &= \frac{P(R) \times P_R(Q)}{P(Q)} \\ &= \frac{0{,}9 \times 0{,}98}{0{,}917} \\ &\approx 0{,}962 \end{aligned}$$

Sachant que l'étudiant a répondu « oui » à la question, la probabilité qu'il ait réussi l'examen est donc :

$$\boxed{P_Q(R) \approx 0{,}962}$$

4. Il s'agit de déterminer un entier k tel que $P(N \geqslant k) \approx 0{,}65$. On obtient, à l'aide de la calculatrice :

$$\boxed{P(N \geqslant 12) \approx 0{,}65}$$

Afin qu'environ 65 % des étudiants soient récompensés, elle doit attribuer les récompenses à partir de la note de 12.

5. La variable aléatoire N suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}615$. Son espérance est donc $E(N) = n \times p = 20 \times 0{,}615 = 12{,}3$ et sa variance $V(N) = n \times p \times (1 - p) = 20 \times 0{,}615 \times 0{,}385 = 4{,}7355$.
Les variables aléatoires N_1, N_2, …, N_{10} suivent toutes la même loi que N, on a donc :

$$E(S) = 10 \times E(N) = 10 \times 12{,}3 = 123$$

Et comme les variables aléatoires N_1, N_2, …, N_{10} sont indépendantes, on a :

$$V(S) = 10 \times V(N) = 4{,}7355 \times 10 = 47{,}355$$

Soit :

$$\boxed{E(S) = 123} \quad \text{et} \quad \boxed{V(S) = 47{,}355}$$

6.(a) La variable aléatoire M modélise :

$$\boxed{\text{La moyenne du groupe des dix étudiants}}$$

(b) On sait alors, d'après le cours, que $E(M) = E(N)$ et que $V(M) = \dfrac{1}{10} \times V(N)$, soit :

$$\boxed{E(M) = 12{,}3} \quad \text{et} \quad \boxed{V(M) = 0{,}47355}$$

(c) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|M - E(M)| \geqslant 2\right) \leqslant \frac{V(M)}{2^2}$$

Soit :

$$P\left(|M - 12{,}3| \geqslant 2\right) \leqslant \frac{0{,}47355}{4}$$

Et par passage à l'événement contraire :

$$P\left(|M - 12{,}3| < 2\right) \leqslant 1 - \frac{0{,}47355}{4}$$

Soit :

$$P\left(12{,}3 - 2 < M < 12{,}3 + 2\right) \geqslant 0{,}8816125$$

Et donc :

$$\boxed{P\left(10{,}3 < M < 14{,}3\right) \geqslant 0{,}8816125}$$

La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est donc supérieure à 0,8.

Commentaires

- Selon moi, l'énoncé de la question 4 est ambigu. Si l'on souhaite qu'au moins 65 % des étudiants soient récompensés, il faut attribuer les récompenses à partir de la note de 11. En effet, on a :

  → $P(N \geqslant 12) \approx 0{,}649 < 0{,}65$

  → $P(N \geqslant 11) \approx 0{,}797 > 0{,}65$

  Mais comme $P(N \geqslant 12)$ est vraiment proche de 0,65, je pense que c'est cette réponse qui était attendue.

- Dans la question 6c, on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  $$\boxed{P\left(|X - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{\delta^2}}$$

  avec $\mu = 12{,}3$, $V = 0{,}47355$ et $\delta = 2$.

8.2 Discret ou continu pour le taux de chlore

Énoncé

Les parties A et B sont indépendantes.

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1 m^3 = 1 000 L. Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg.L^{-1}, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg.L^{-1}.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 mg.L^{-1}. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de 0,70 mg.L^{-1}.

Partie A : étude d'un modèle discret.
Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 mg.L^{-1}.
2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore en mg.L^{-1}, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0{,}7$.
   On admet que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}92 v_n + 0{,}3$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.
4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-contre écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.
5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```python
def alerte_chlore(s) :
  n=0
  v=0.7
  while ... :
    n= ...
    v= ...
  return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu.
Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en mg.L^{-1}, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0{,}08y + \dfrac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-0,08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

2. (a) Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.
   (b) On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à 0,7 mg.L^{-1}. On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg.L^{-1}. Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

Correction

Partie A

1. Alain ajoute 15 g, soit 15 000 mg et la piscine contient 50 m^3 soit 50 000 L. On a alors :

$$\frac{15\,000}{50\,000} = 0{,}3$$

L'ajout de 15 g pour 50 m^3 fait donc bien augmenter le taux de 0,3 mg.L^{-1}.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $v_0 = 0{,}7$ et $v_1 = 0{,}944$. On a donc $v_0 \leqslant v_1 \leqslant 4$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$$

  On a alors, en multipliant par 0,92 qui est positif :

$$0{,}92v_n \leqslant 0{,}92v_{n+1} \leqslant 3{,}68$$

  Puis, en ajoutant 0,3 :

$$0{,}92v_n + 0{,}3 \leqslant 0{,}92v_{n+1} + 0{,}3 \leqslant 3{,}98$$

  Soit :

$$v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 3{,}98$$

  Et donc a fortiori :

$$v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 4$$

  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4}$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

→ $v_n \leqslant v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est croissante.

→ $v_n \leqslant 4$ donc la suite (v_n) est majorée par 4.

La suite (v_n) est croissante et majorée donc elle converge vers une limite l inférieure ou égale à 4.
De plus, on sait qu'alors (v_n) converge vers un point fixe, c'est-à-dire un réel l qui vérifie $0{,}92l + 0{,}3 = l$. Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} 0{,}92l + 0{,}3 = l &\iff 0{,}08l = 0{,}3 \\ &\iff l = \frac{0{,}3}{0{,}08} \\ &\iff l = 3{,}75 \end{aligned}$$

La suite (v_n) converge donc vers :

$$\boxed{l = 3{,}75}$$

3. À long terme, le taux de chlore ne sera pas conforme à la préconisation des piscinistes car il va se rapprocher de 3,75 mg.L^{-1} et dépassera donc 3 mg.L^{-1}.
4. On complète l'algorithme de la façon suivante :

```
def alerte_chlore(s) :
  n = 0
  v = 0.7
  while v <= s :
    n = n+1
    v = 0,92*v + 0.3
  return n
```

5. En exécutant l'instruction `alerte_chlore(3)` on obtient la valeur :

$$\boxed{17}$$

Cela signifie que la taux de chlore dépassera 3 mg.L^{-1} après 17 jours de traitement.

Partie B

1. Résolvons l'équation différentielle $y' = -0{,}08y + \dfrac{q}{50}$.
   - L'équation homogène associée $y' = -0{,}08y$ admet pour solutions les fonctions de la forme :
   $$x \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}08x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$
   - On a $\dfrac{\frac{q}{50}}{0{,}08} = \dfrac{q}{50 \times 0{,}08} = \dfrac{q}{4}$ donc l'équation $y' = -0{,}08y + \dfrac{q}{50}$ admet pour solution particulière constante la fonction :
   $$x \mapsto \frac{q}{4}$$
   - Les solutions de l'équation différentielle $y' = -0{,}08y + \dfrac{q}{50}$ sont donc les fonctions de la forme :
   $$\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

2.(a) On a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{q}{4}} \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}08x} = 0$$

(b) Il s'agit de déterminer les valeurs de C et q telles que $f(0) = 0{,}7$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$:

$$\begin{cases} f(0) = 0{,}7 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} C + \dfrac{q}{4} = 0{,}7 \\ \dfrac{q}{4} = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C = 0{,}7 - \dfrac{q}{4} \\ q = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C = -1{,}3 \\ q = 8 \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{\begin{cases} C = -1{,}3 \\ q = 8 \end{cases}}$$

On a alors :

$$\boxed{f(x) = -1{,}3\mathrm{e}^{-0{,}08x} + 2}$$

Commentaires

- Dans la question 2b de la partie A, le fait que la suite soit croissante et majorée par 4 permet de conclure que la suite converge mais ne permet pas de déterminer la valeur de la limite (ce n'est pas nécessairement 4). On montre d'ailleurs ici que la limite est 3,75.
- Dans la question 5 de la partie A, on peut également justifier en utilisant les valeurs des termes de la suite obtenue à l'aide de la calculatrice. Il suffit alors de dire que :

  → $v_{16} \approx 2{,}95 < 3$

  → $v_{17} \approx 3{,}01 > 3$

  C'est donc à partir de $n = 17$ que v_n dépasse 3.

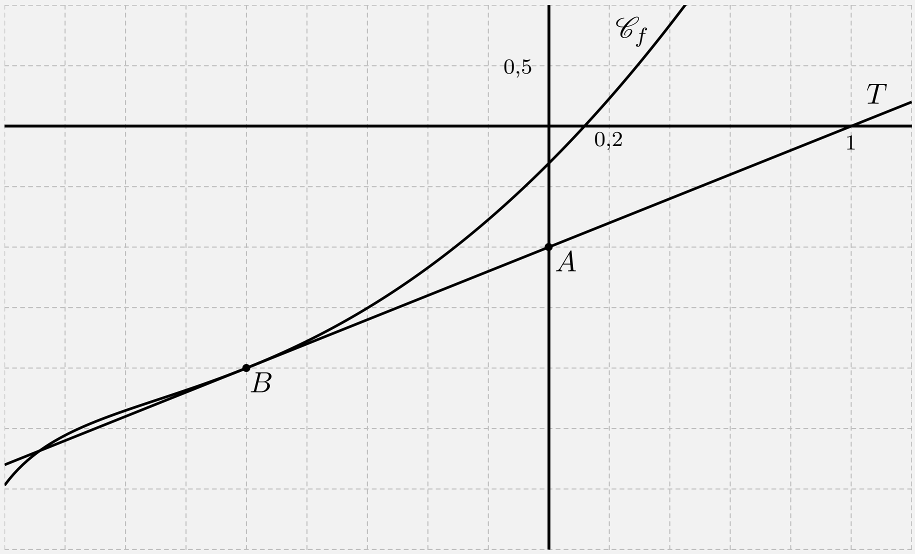
8.3 Distance d'un point à une courbe

Énoncé (6 points)

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.

On précise que la droite T passe par le point $A(0\,; -1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction *f*.

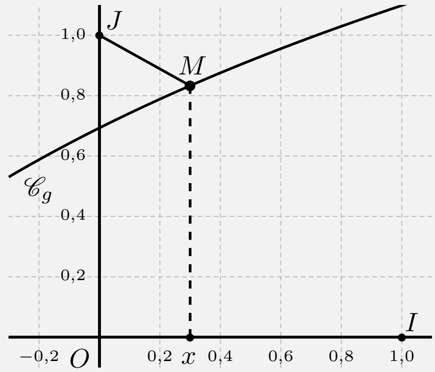
On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.
   On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;+\infty[$.
6. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x+2)$.

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,; I\,, J)$, représenté ci-contre.



Soit M un point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $h(x) = JM^2$.

1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.
2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée. On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$

où f est la fonction étudiée en partie B.

(a) Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;+\infty[$.
Les limites ne sont pas demandées.

(b) En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.

3. On notera M_α le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α.

(a) Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

(b) En déduire que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.
On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

Correction
Partie A

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $B(-1\,;-2)$ donc :

$$\boxed{f(-1) = -2}$$

La tangente au point d'abscisse -1 passe par les points $B(-1\,;-2)$ et $A(0\,;-1)$. Son coefficient directeur est donc égal à :

$$\frac{-1-(-2)}{0-(-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

Soit :

$$\boxed{f'(-1) = 1}$$

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ semble être concave puis convexe.

3. A priori, la courbe $\mathscr{C}_f$ ne coupe l'axe des abscisses qu'en un point. On peut donc conjecturer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution :

$$\boxed{x \approx 0{,}1}$$

Partie B

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x-1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to -2}\ln(x+2) = -\infty \end{cases}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc :

$$\boxed{\text{Une asymptote verticale d'équation } x = -2}$$

2. La fonction f est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x > -2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2 + \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2} \\ &= \frac{2x^2+4x+2x+4+1}{x+2} \\ &= \frac{2x^2+6x+5}{x+2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x^2+6x+5}{x+2}}$$

3. Le polynôme $2x^2+6x+5$ admet pour discriminant $\Delta = -4$, il n'a donc aucune racine réelle et est strictement positif sur $\mathbb{R}$. De plus, $x+2$ est strictement positif sur $]-2\,;\,+\infty[$ donc $f'(x) > 0$ sur $]-2\,;\,+\infty[$. On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-2\,;\,+\infty[}$$

On a donc le tableau :

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in\,]-\infty\,;\,+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$. Et on a :

- $f(0{,}11) \approx -0{,}02 < 0$
- $f(0{,}12) \approx 0{,}0058 > 0$

Donc :

$$\boxed{0{,}11 < \alpha < 0{,}12}$$

5. f est strictement croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$ et s'annule en α. On a donc le tableau :

x	-2		α		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

6. La fonction f' est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in]-2\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x+6)(x+2) - (2x^2+6x+5) \times 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{4x^2+8x+6x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Le polynôme $2x^2+8x+7$ admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{2}}{2} \approx -2{,}71 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4+\sqrt{2}}{2} \approx -1{,}29$$

Et il est positif à l'extérieur de l'intervalle des racines. Et comme $(x+2)^2$ est positif, on a le tableau :

x	-2		x_2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	concave		convexe	

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en x_2. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc un unique point d'inflexion au point d'abscisse :

$$\boxed{\frac{-4+\sqrt{2}}{2}}$$

Partie C

1. On a $J(0\,;\,1)$ et $M(x\,;\,\ln(x+2))$ donc, pour tout $x > -2$:

$$\begin{aligned} h(x) &= JM^2 \\ &= (x-0)^2 + (\ln(x+2)-1)^2 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{h(x) = x^2 + [\ln(x+2)-1]^2}$$

2.(a) Pour tout $x \in]-2\,;\,+\infty[$, $x+2>0$ donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$. On a donc le tableau :

x	-2		α		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$h(x)$	||	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

(b) La distance JM étant positive, elle est minimale lorsque son carré est minimal, c'est-à-dire lorsque la valeur de $h(x)$ est minimale. D'après le tableau de variations, h atteint son minimum en α. On en déduit que :

$$\boxed{JM \text{ est minimale pour } x=\alpha}$$

3.(a) On sait que $f(\alpha)=0$, c'est-à-dire que :

$$\alpha^2+2\alpha-1+\ln(\alpha+2)=0$$

Et donc que :

$$\boxed{\ln(\alpha+2)=1-2\alpha-\alpha^2}$$

(b) • La fonction g est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \in]-2\,;\,+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{1}{x+2}$. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α est donc :

$$g'(\alpha)=\frac{1}{\alpha+2}$$

• On a $J(0\,;\,1)$ et $M_\alpha(\alpha\,;\,g(\alpha))$, soit $M_\alpha(\alpha\,;\,\ln(\alpha+2))$ et donc, d'après la question précédente $M_\alpha(\alpha\,;\,1-2\alpha-\alpha^2)$. Calculons le coefficient directeur m_α de la droite (JM_α) :

$$\begin{aligned} m_\alpha &= \frac{y_{M_\alpha}-y_J}{x_{M_\alpha}-x_J} \\ &= \frac{1-2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha-0} \\ &= \frac{-2\alpha-\alpha^2}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha(-2-\alpha)}{\alpha} \\ &= -2-\alpha \\ &= -(\alpha+2) \end{aligned}$$

• Calculons alors le produit des coefficients directeurs :

$$g'(\alpha)\times m_\alpha = \frac{1}{\alpha+2}\times(-(\alpha+2))=-1$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La tangente à } \mathscr{C}_g \text{ au point } M_\alpha \text{ et la droite } (JM_\alpha) \text{ sont perpendiculaires}}$$

Commentaires

- Pour le calcul de JM^2, on peut commencer par calculer la longueur JM à l'aide de la formule :

$$JM = \sqrt{(x_M - x_J)^2 + (y_M - y_J)^2}$$

Et donc, en élevant au carré, la racine disparaît :

$$JM^2 = (x_M - x_J)^2 + (y_M - y_J)^2$$

Dans la correction, j'ai élevé directement au carré.

- Dans la question 6 de la partie B, on doit étudier le signe du polynôme $2x^2 + 8x + 7$. Comme il y a deux racines x_1 et x_2 et que le coefficient de x^2 est positif, son signe est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$2x^2 + 8x + 7$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et comme on travaille sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ et que $x_1 < -2$, on obtient le tableau :

x	-2		x_2		$+\infty$
$2x^2 + 8x + 7$		$-$	0	$+$	

8.4 Le vrai-faux de l'espace

Énoncé (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$A(2\,;0\,;0)\ ,\ B(0\,;4\,;\ 3)\ ,\ C(4\,;4\,;1)\ ,\ D(0\,;0\,;4) \text{ et } H(-1\,;1\,;2)$$

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$.

Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - y + 2z - 2 = 0$.
Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Correction

Affirmation 1 : Vrai

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-2\\4-0\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0-2\\0-0\\4-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, C et D définissent un plan.

Soit alors $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}8\\-5\\4\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan d'équation $8x-5y+4z-16=0$. On a :

- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 8\times 2+(-5)\times 4+4\times 1 = 16-20+4=0$
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AD} = 8\times(-2)+(-5)\times 0+4\times 4 = -16+0+16=0$

Le plan (ACD) admet donc une équation de la forme $8x-5y+4z+d=0$. Et comme le point $A(2\,;\,0\,;\,0)$, par exemple, appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation donc $8\times 2-5\times 0+4\times 0+d=0$ soit $d=-16$. Le plan (ACD) admet donc bien pour équation cartésienne $8x-5y+4z-16=0$.

Affirmation 2 : Faux

Le plan (ABC) admet pour équation $8x-5y+4z-16=0$. Or les coordonnées du point B ne vérifient pas cette équation, en effet $8\times 0-5\times 4+4\times 3-16=-24\neq 0$. Le point B n'appartient donc pas au plan (ACD). On en déduit que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Affirmation 3 : Vrai

La droite (AC) passe par $A(2\,;\,0\,;\,0)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur, elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=2+2t\\y=4t\\z=t\end{cases}\qquad\text{avec } t\in\mathbb{R}$$

La droite (BH) passe par $B(0\,;\,4\,;\,3)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur, elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases}x=-t'\\y=4-3t'\\z=3-t'\end{cases}\qquad\text{avec } t\in\mathbb{R}$$

Déterminons l'intersection de (AC) et (BH) :

$$\begin{cases} 2+2t=-t' \\ 4t=4-3t' \\ t=3-t' \end{cases} \iff \begin{cases} 2+2(3-t')=-t' \\ 4(3-t')=4-3t' \\ t=3-t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2+6-2t'=-t' \\ 12-4t'=4-3t' \\ t=3-t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t'=8 \\ t'=8 \\ t=-5 \end{cases}$$

Les droites (AC) et (BH) sont donc sécantes. Le point d'intersection est le point de paramètre $t=-5$ dans la représentation paramétrique de (AC) et de paramètre $t'=8$ dans celle de (BH), c'est-à-dire le point de coordonnées :

$$\boxed{(-8\,;\,-20\,;\,-5)}$$

Affirmation 4 : Vrai

Le point H appartient au plan (ABC), en effet $-1-1+2\times 2-2=0$. On a $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 0-1 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. D'après son équation cartésienne, le plan (ABC) admet le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal, soit le vecteur $\overrightarrow{HD}$. Finalement, (HD) est perpendiculaire au plan (ABC) et H appartient au plan (ABC) donc H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

Commentaires

- Pour montrer que trois points A, C et D définissent un plan, il faut montrer que ces points ne sont pas alignés. Il suffit donc de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.
- Pour l'affirmation 1, on aurait pu vérifier simplement que les coordonnées des points A, C et D vérifient l'équation donnée. Cela ne prouve cependant pas que les points ne sont pas alignés.
- Pour montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires, on aurait également pu montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires. Pour cela, on peut montrer qu'il n'existe pas de réels α et β tels que $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ ou alors que pour tous réels α, β et γ :

$$\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}+\gamma\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{0} \implies \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

SUJET 9

POLYNÉSIE - 19 JUIN 2024

9.1 Un autre vrai-faux de l'espace

Énoncé

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.
Les quatre affirmations se placent dans la situation suivante :
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$, on considère les points :

$$A(2\,;\,1\,;\,-1),\quad B(-1\,;\,2\,;\,1)\quad \text{et}\quad C(5\,;\,0\,;\,-3).$$

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x+5y-2z+3=0.$$

On note $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-t+3 \\ y=t+2 \\ z=2t+1 \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Affirmation 1 :
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAC).

Affirmation 2 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont sécantes au point C.

Affirmation 3 :
La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 :
Le plan médiateur du segment $[BC]$, noté Q, a pour équation cartésienne :

$$3x-y-2z-7=0$$

On rappelle que le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Correction

Affirmation 1 : Faux

On a $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{OC} = 1\times 5 + 0\times 0 + 2\times(-3) = 5-6 = -1 \neq 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ n'est donc pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OC}$, il ne peut donc pas être normal au plan (OAC).

Affirmation 2 : Vrai

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On en déduit que les points A, B et C sont alignés et donc que le point C appartient à la droite (AB). D'autre part, on peut remarquer que le point C appartient à la droite $\mathscr{D}$. En effet, c'est le point de paramètre $t=-2$. Le point C appartient donc à la fois aux droites $\mathscr{D}$ et (AB) et comme ces deux droites ne sont pas confondues, elles sont sécantes au point C.

Affirmation 3 : Vrai

D'après son équation cartésienne, le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et, d'après sa représentation paramétrique, la droite $\mathscr{D}$ admet le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. On a alors :

$$\overrightarrow{n'}.\overrightarrow{u} = 1\times(-1) + 5\times 1 + (-2)\times 2 = -1+5-4 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{n'}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 : Vrai

Le plan (Q) admet le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}$ pour vecteur normal, donc également n'importe quel vecteur qui lui est colinéaire, par exemple le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Il admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$3x - y - 2z + d = 0 \quad \text{avec } d\in\mathbb{R}$$

Soit I le milieu de $[BC]$, on a $I\left(\dfrac{-1+5}{2}\,;\,\dfrac{2+0}{2}\,;\,\dfrac{1+(-3)}{2}\right)$ soit $I\,(2\,;\,1\,;\,-1)$. Le point I appartient au plan (Q) donc ses coordonnées vérifient l'équation, soit $3\times 2 - 1 - 2\times(-1) + d = 0$ puis $6-1+2+d=0$ et donc $d=-7$. Le plan (Q) admet donc pour équation :

$$3x - y - 2z - 7 = 0$$

Commentaires

- Pour l'affirmation 1, on peut se rendre compte que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OA}$ mais cela ne suffit pas pour être orthogonal au plan (OAC). En effet, pour montrer qu'un vecteur est orthogonal à un plan, il faut montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan (et dans ce cas, il est alors orthogonal à tous les vecteur du plan).
- Pour l'affirmation 2, si l'on souhaite justifier que les droites $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont pas confondues, il suffit de dire qu'elles ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

9.2 Refroidissement d'un matériau injecté

Énoncé

Une entreprise fabrique des objets en plastique en injectant dans un moule de la matière fondue à 210°C. On cherche à modéliser le refroidissement du matériau à l'aide d'une fonction f donnant la température du matériau injecté en fonction du temps t.
Le temps est exprimé en seconde et la température est exprimée en degré Celsius.
On admet que la fonction f cherchée est solution d'une équation différentielle de la forme suivante où m est une constante réelle que l'on cherche à déterminer :

$$(E) \quad : \quad y' + 0{,}02y = m$$

Partie A

1. Justifier l'affichage suivant d'un logiciel de calcul formel :

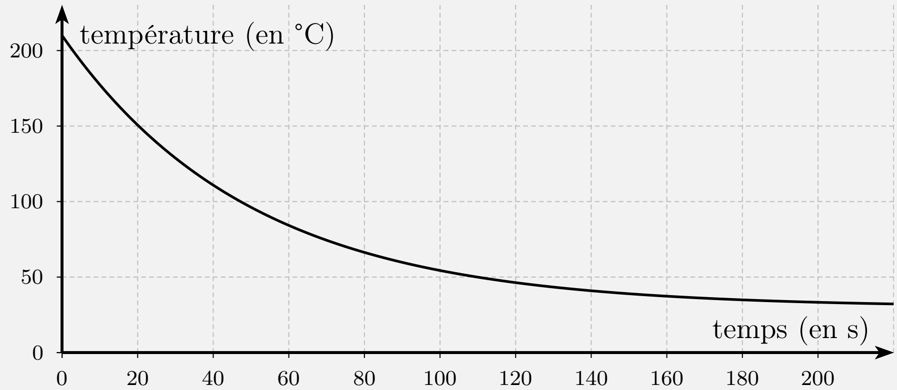
Entrée :	RésoudreEquationDifférentielle $(y' + 0{,}02y = m)$
Sortie :	$\boxed{\rightarrow}$ $y = k * \exp(-0.02 * t) + 50 * m$

2. La température de l'atelier est de 30°C. On admet que la température $f(t)$ tend vers 30°C lorsque t tend vers l'infini.
Démontrer que $m = 0{,}6$.
3. Déterminer l'expression de la fonction f cherchée en tenant compte de la condition initiale $f(0) = 210$.

Partie B

On admet ici que la température (exprimée en degré Celsius) du matériau injecté en fonction du temps (exprimé en seconde) est donnée par la fonction dont l'expression et une représentation graphique sont données ci-dessous :

$$f(t) = 180\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30.$$



1. L'objet peut être démoulé lorsque sa température devient inférieure à 50°C.
   (a) Par lecture graphique, donner une valeur approchée du nombre T de secondes à attendre avant de démouler l'objet.
   (b) Déterminer par le calcul la valeur exacte de ce temps T.
2. À l'aide d'une intégrale, calculer la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes.

Correction
Partie A

1. L'équation différentielle $y' + 0{,}02y = m$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}02$ et $b = m$. On a alors $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{m}{0{,}02} = 50m$, les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :
$$\boxed{t \mapsto k\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 50m} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$
   D'où l'affichage obtenu.
2. On a $f(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 50m$. Or $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}02t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 50m$. D'après l'énoncé, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 30$, d'où $50m = 30$ soit :
$$\boxed{m = \frac{30}{50} = 0{,}6}$$
3. D'après la question précédente, la fonction f est de la forme :
$$f(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30$$
   On a alors :
$$\begin{aligned} f(0) = 210 &\iff k\mathrm{e}^{0} + 30 = 210 \\ &\iff k + 30 = 210 \\ &\iff k = 180 \end{aligned}$$
   On a donc, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:
$$\boxed{f(t) = 180\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30}$$

Partie B

1.(a) On lit graphiquement que la température passe en-dessous de 50°au bout d'environ 110 secondes. Le temps à attendre avant de démouler l'objet est donc d'environ :

$$\boxed{\text{1 minute et 50 secondes}}$$

(b) Il s'agit de résoudre l'équation $f(t) = 50$:

$$\begin{aligned} f(t) = 50 &\iff 180\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30 = 50 \\ &\iff 180\mathrm{e}^{-0{,}02t} = 20 \\ &\iff \mathrm{e}^{-0{,}02t} = \frac{1}{9} \\ &\iff -0{,}02t = \ln\left(\frac{1}{9}\right) \\ &\iff -0{,}02t = -\ln(9) \\ &\iff t = \frac{-\ln(9)}{-0{,}02} \\ &\iff t = 50\ln(9) \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{T = 100\ln(3)}$$

2. Il s'agit de calculer la valeur moyenne m de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,100]$:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{100}\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{100}\int_0^{100} 180\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{100}\left[\frac{180}{-0{,}02}\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30t\right]_0^{100} \\ &= \frac{1}{100}\Big[-9\,000\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30t\Big]_0^{100} \\ &= \frac{1}{100}\left(-9\,000\mathrm{e}^{-0{,}02\times 100} + 30\times 100 + 9\,000\mathrm{e}^{-0{,}02\times 0} + 30\times 0\right) \\ &= \frac{1}{100}\left(-9\,000\mathrm{e}^{-2} + 3\,000 + 9\,000\right) \\ &= \frac{1}{100}\left(-9\,000\mathrm{e}^{-2} + 12\,000\right) \\ &= 120 - 90\mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

La valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes est donc (en °C) :

$$\boxed{m = 120 - 90\mathrm{e}^{-2} \approx 108}$$

Commentaires

- Dans la question 1b, détaillons la simplification :

$$T = \frac{-\ln(9)}{-0{,}02} = \frac{\ln(9)}{0{,}02} = \frac{\ln(3^2)}{\frac{1}{50}} = 50 \times 2\ln(3) = 100\ln(3)$$

9.3 Lancers de pièces

Énoncé

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Partie A
On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$				

Partie B
Voici les règles d'un jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais.

- On lance trois pièces équilibrées :
  - Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée ;
  - Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

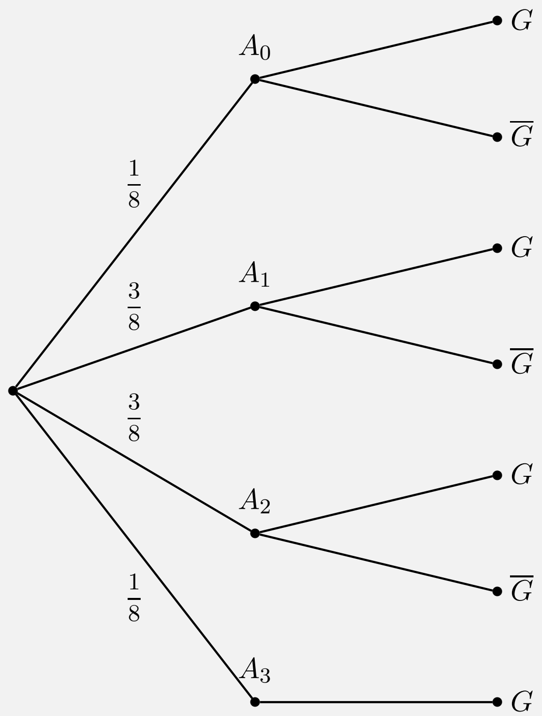
On considère les évènements suivants :

- G : « la partie est gagnée ».

Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les évènements :

- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. Démontrer que $P_{A_1}(G) = \dfrac{1}{4}$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Démontrer que la probabilité p de gagner à ce jeu est $p = \dfrac{27}{64}$.
4. La partie a été gagnée. Quelle est la probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative ?
5. Combien de fois faut-il jouer à ce jeu pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95 ?

Correction

Partie A

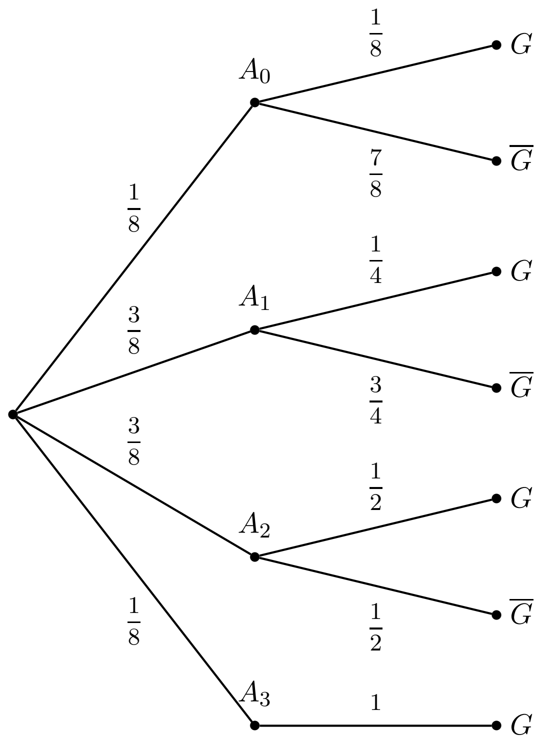
1. On répète 3 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (obtenir « Face ») est égale à 0,5. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :
$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 3 \text{ et } p = 0{,}5}$$
2. La loi de X est donnée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,125	0,375	0,375	0,125

Partie B

1. Il s'agit de la probabilité de gagner la partie sachant qu'une pièce est tombée du côté « Face » au premier lancer. Pour cela, il faut obtenir « Face » avec les deux autres pièces, la probabilité est alors égale à $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$. On a donc :
$$\boxed{P_{A_1}(G) = \frac{1}{4}}$$

2. On a l'arbre :



3. Il s'agit de calculer $P(G)$. Les événements A_0, A_1, A_2 et A_3 forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(G) &= P(A_0) \times P_{A_0}(G) + P(A_1) \times P_{A_1}(G) + P(A_2) \times P_{A_2}(G) + P(A_3) \times P_{A_3}(G) \\
&= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times 1 \\
&= \frac{1}{64} + \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{12}{64} + \frac{8}{64} \\
&= \frac{27}{64}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{p = \frac{27}{64}}$$

4. Il s'agit de calculer $P_G(A_1)$:

$$\begin{aligned}
P_G(A_1) &= \frac{P(A_1 \cap G)}{P(G)} \\
&= \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{4}}{\frac{27}{64}} \\
&= \frac{3}{32} \times \frac{64}{27} \\
&= \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

La probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative sachant que la partie est gagnée est donc :

$$\boxed{P_G(A_1) = \frac{2}{9}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Y la variable aléatoire qui compte le nombre de parties gagnées sur n parties jouées. Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{27}{64}$. La probabilité de gagner au moins une partie est :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}95 &\iff 1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n \geqslant 0{,}95 \\ &\iff \left(\frac{37}{64}\right)^n \leqslant 0{,}05 \\ &\iff \ln\left(\left(\frac{37}{64}\right)^n\right) \leqslant \ln(0{,}05) \\ &\iff n \ln\left(\frac{37}{64}\right) \leqslant \ln(0{,}05) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \quad \left(\textit{car } \ln\left(\tfrac{37}{64}\right) < 0\right) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \approx 5{,}47$ donc le nombre de parties qu'il faut jouer à ce jeu pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95 est :

$$\boxed{n = 6}$$

Commentaires

- Dans la question 2, les probabilités peuvent être obtenues directement à l'aide de la calculatrice. On peut également utiliser les formules, on a par exemple :

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} 0{,}5^2 \times 0{,}5^1 = 3 \times 0{,}5^3 = 0{,}375$$

9.4 Une fonction Python pour étudier une suite

Énoncé

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.
Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n) :
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie 1.3333333333333333.
Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.
3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
>> suite(2)
1.3333333333333333
>> suite(5)
1.0058479532163742
>> suite(10)
1.0000057220349845
>> suite(20)
1.000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;5[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

3.(a) Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

(b) Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente
Déterminer sa limite.

5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?

Correction
Partie A

1. On complète le script de la façon suivante :

```
def suite(n) :
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 4 / (5 - u)
    return u
```

2. La commande `suite(2)` renvoie la valeur de u_2. Or, on a :
   - $u_1 = \dfrac{4}{5-3} = \dfrac{4}{2} = 2$
   - $u_2 = \dfrac{4}{5-2} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}3333$

   Cela explique l'affichage.

3. Les affichages nous donnent les valeurs suivantes :
   - $u_2 \approx 1{,}3333333333333333$
   - $u_5 \approx 1{,}0058479532163742$
   - $u_{10} \approx 1{,}0000057220349845$
   - $u_{20} \approx 1{,}000000000005457$

   On peut donc conjecturer que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante et converge vers } 1}$$

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ et, pour tout $x \in\,]-\infty\,;\,5[$:

$$f'(x) = -\frac{-4}{(5-x)^2} = \frac{4}{(5-x)^2}$$

Pour tout $x \in\,]-\infty\,;\,5[$, on a $f'(x) \geqslant 0$ donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est croissante sur l'intervalle }]-\infty\,;\,5[}$$

2. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.
   - **Initialisation :**
     On a $u_0 = 3$ et $u_1 = 2$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4$. On en déduit que la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :
     $$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$$
     On a alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,; 5[$:
     $$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(4)$$
     Soit :
     $$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$
     Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.
   - **Conclusion :**
     La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
     $$\boxed{1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4}$$

3.(a) Pour tout $x \in]-\infty\,; 5[$, on a :
$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{4}{5-x} = x \\ &\iff 4 = x(5-x) \\ &\iff 4 = 5x - x^2 \\ &\iff x^2 - 5x + 4 = 0 \end{aligned}$$
D'où l'équivalence :
$$\boxed{f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0}$$

(b) L'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$ est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 > 0$. Elle admet donc deux solutions réels :
$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = 4$$
L'équation $f(x) = x$ admet donc pour ensemble solution sur l'intervalle $]-\infty\,; 5[$:
$$\boxed{\mathscr{S} = \{1\,; 4\}}$$

4. D'après la question 2 de la partie B, la suite (u_n) est :
   - décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)
   - minorée par 1 (car $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

On en déduit que la suite (u_n) converge vers une limite l. Et comme la suite est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et que la fonction f est continue sur $]-\infty\,; 5[$, on sait que l vérifie $f(l) = l$. Or cette équation admet deux solutions, qui sont 1 et 4. Mais comme la suite (u_n) est décroissante et que $u_0 = 3$, la suite ne peut pas converger vers 4, d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

5. Le comportement de la suite serait différent en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$. En effet, 4 étant un point fixe pour la fonction f, dans ce cas la suite (u_n) serait constante égale à 4. Autrement dit :

$$\boxed{u_n = 4 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

Commentaires

- Dans la question 1 de la partie B, pour le calcul de la dérivée de la fonction f, on utilise la formule :

  $$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$$

  avec $u(x) = 5 - x$. Il reste ensuite à multiplier par la constante 4.

SUJET 10

POLYNÉSIE - 20 JUIN 2024

10.1 Les jeux olympiques 2024

Énoncé

Un sondage réalisé en France fournit les informations suivantes :

- 60 % des plus de 15 ans ont l'intention de regarder les jeux Olympiques et Paralympiques (JOP) de Paris 2024 à la télévision ;
- parmi ceux qui ont l'intention de regarder les JOP, 8 personnes sur 9 déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

On choisit au hasard une personne de plus de 15 ans. On considère les évènements suivants :

- J : « la personne a l'intention de regarder les JOP Paris 2024 à la télévision » ;
- S : « la personne choisie déclare pratiquer une activité sportive régulière ».

On note $\overline{J}$ et $\overline{S}$ leurs évènements contraires.
Dans les questions 1. et 2., les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

1. Démontrer que la probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est de $\dfrac{8}{15}$.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

Selon ce sondage, deux personnes sur trois parmi les plus de 15 ans déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

2. (a) Calculer la probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière.
   (b) En déduire la probabilité de S sachant $\overline{J}$ notée $P_{\overline{J}}(S)$.

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

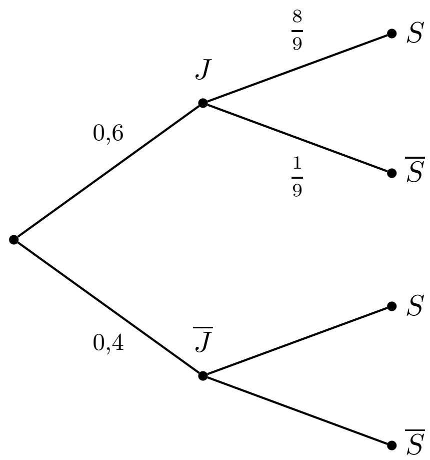
3. Dans le cadre d'une opération de promotion, 30 personnes de plus de 15 ans sont choisies au hasard.
   On assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.
   (a) Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

(b) Calculer la probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.

(c) La fédération française de judo souhaite offrir une place pour la finale de l'épreuve par équipe mixte de judo à l'Arena Champ-de-Mars pour chaque personne déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi ces 30 personnes.
Le prix d'une place s'élève à 380 € et on dispose d'un budget de 10 000 euros pour cette opération.
Quelle est la probabilité que ce budget soit insuffisant ?

Correction

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Il s'agit alors de calculer $P(J \cap S)$:

$$\begin{aligned} P(J \cap S) &= P(J) \times P_J(S) \\ &= 0{,}6 \times \frac{8}{9} \\ &= \frac{6}{10} \times \frac{8}{9} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

La probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est donc bien :

$$\boxed{P(J \cap S) = \frac{8}{15}}$$

2. (a) Il s'agit de calculer $P(\overline{J} \cap S)$. Les événements J et $\overline{J}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(J \cap S) + P(\overline{J} \cap S)$$

Or, d'après l'énoncé, $P(S) = \dfrac{2}{3}$ et, d'après la question précédente, $P(J \cap S) = \dfrac{8}{15}$. On en déduit :

$$P(\overline{J} \cap S) = \frac{2}{3} - \frac{8}{15} = \frac{2}{15}$$

La probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est donc :

$$\boxed{P(\overline{J} \cap S) = \frac{2}{15}}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} P_{\overline{J}}(S) &= \frac{P(\overline{J} \cap S)}{P(\overline{J})} \\ &= \frac{\frac{2}{15}}{0{,}4} \\ &= \frac{2}{15} \times \frac{10}{4} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La probabilité que la personne pratique une activité sportive régulière sachant qu'elle n'a pas l'intention de regarder les JOP est donc :

$$\boxed{P_{\overline{J}}(S) = \frac{1}{3}}$$

3.(a) On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à $\frac{2}{3}$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = \frac{2}{3}}$$

(b) Il s'agit de calculer $P(X = 16)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice que la probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes est :

$$\boxed{P(X = 16) \approx 0{,}046}$$

(c) Le budget de 10 000 euros permet de payer 26 places, il s'agit donc de calculer $P(X \geqslant 27)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité que ce budget soit insuffisant est :

$$\boxed{P(X \geqslant 27) \approx 0{,}003}$$

Commentaires

- Dans la question 3b, on aurait pu utiliser la formule :

$$P(X = 16) = \binom{30}{16} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{16} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{14}$$

10.2 Un QCM sur différents thèmes

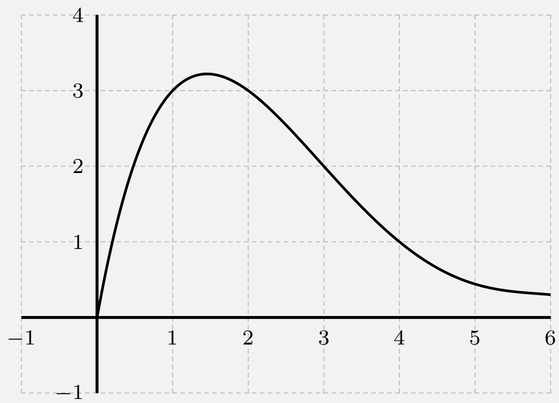
Énoncé

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend cinq questions. Les cinq questions sont indépendantes.
*Pour chacune des questions, **une seule des quatre réponses est exacte**. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

1. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   A. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$
   B. $f(x) = -\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$
   C. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \dfrac{7}{3}$
   D. $f(x) = -\dfrac{10}{3}\mathrm{e}^{-3x} - \dfrac{7}{3}$

2. La courbe d'une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ est donnée ci-dessous.



   Un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est :

   A. $0 \leqslant I \leqslant 4$
   B. $1 \leqslant I \leqslant 5$
   C. $5 \leqslant I \leqslant 10$
   D. $10 \leqslant I \leqslant 15$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 \ln(x^2 + 4)$.
   Alors $\displaystyle\int_0^2 g'(x)\,\mathrm{d}x$ vaut, à 10^{-1} près :

   A. 4,9
   B. 8,3
   C. 1,7
   D. 7,5

4. Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale.

Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

A. 31^5

B. $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$

C. $31 + 30 + 29 + 28 + 27$

D. $\binom{31}{5}$

5. La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :
   - 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
   - 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
   - 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

   Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

A. $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$

B. $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$

C. $\binom{20}{3}$

D. $20^3 \times 11^2$

Correction

1. **Réponse B**
   L'équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -3$ et $b = 7$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, soit les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{-3x} + \frac{7}{3} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

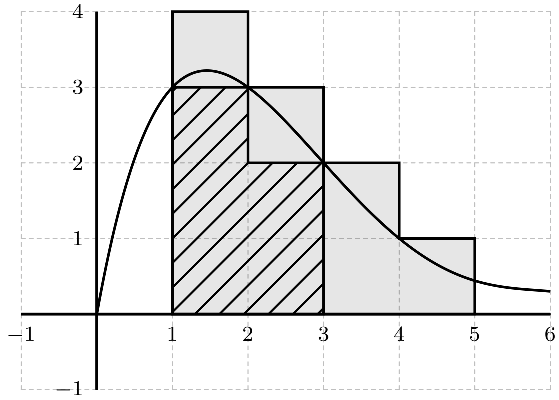
   Soit f la solution vérifiant $f(0) = 1$, on a :

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &\iff \lambda e^{-3x} + \frac{7}{3} = 1 \\ &\iff \lambda e^{0} + \frac{7}{3} = 1 \\ &\iff \lambda = 1 - \frac{7}{3} \\ &\iff \lambda = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

   f est donc la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\boxed{f(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x} + \frac{7}{3}}$$

2. **Réponse C**
   L'intégrale I est égale à l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f est les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$. Cette aire est comprise entre l'aire du domaine hachuré et celle du domaine grisée sur la figure ci-dessous.



On a donc l'encadrement :

$$\boxed{5 \leqslant I \leqslant 10}$$

3. **Réponse B**
On a :

$$\int_0^2 g'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[g(x)\Big]_0^2 = \Big[x^2 \ln(x^2+4)\Big]_0^2 = 4\ln(8) \approx 8{,}3$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^2 g'(x)\,\mathrm{d}x \approx 8{,}3}$$

4. **Réponse D**
Dans cette situation, on choisit 5 élèves parmi 31 sans répétition et sans tenir compte de l'ordre. Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 31, soit :

$$\boxed{\binom{31}{5}}$$

5. **Réponse A**
Le nombre de possibilités pour le choix des 3 élèves ayant choisi la spécialité SES est $\binom{20}{5}$ et le nombre de possibilités pour les 2 autres élèves est $\binom{11}{2}$. Le nombre total de groupes possibles est donc :

$$\boxed{\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}}$$

Commentaires

- Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée. Je me suis permis ici de justifier les réponses car cela n'aurait pas eu un très grand intérêt pédagogique de donner uniquement les cinq lettres correspondant aux bonnes réponses.

10.3 Une fonction mystère

Énoncé

On considère la suite (u_n), définie par :

$$u_0 = 8 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$$

1. (a) Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2.

   (b) On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```python
def mystere(k):
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k):
        S = S + u
        u = u - log(u / 4)
    return S
```

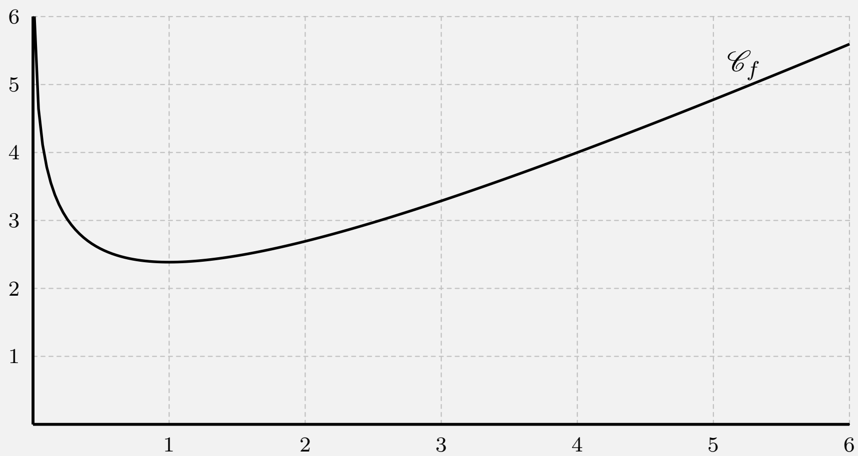
   L'exécution de `mystere(10)` renvoie `58.44045206721732`. Que représente ce résultat ?

   (c) Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6 :



Étudier les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,;+\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3.(a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

(b) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.
On note ℓ la valeur de cette limite.

(c) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

(d) En déduire la valeur de ℓ.

Correction

1.(a) On a :

- $u_1 = 8 - \ln\left(\dfrac{8}{4}\right) = 8 - \ln(2) \approx 7{,}31$
- $u_2 = 8 - \ln(2) - \ln\left(\dfrac{8-\ln(2)}{4}\right) \approx 6{,}70$

Soit :

$$\boxed{u_1 \approx 7{,}31} \quad \text{et} \quad \boxed{u_2 \approx 6{,}70}$$

(b) La fonction `mystere` renvoie la somme des k premiers termes de la suite (u_n). Cela signifie donc que :

$$\boxed{u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9 \approx 58.44045206721732}$$

(c) Afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n), on peut modifier la fonction de la façon suivante :

```python
def mystere(k) :
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k) :
        S = S + u
        u = u - log(u / 4)
    return S / k
```

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{x}{4}} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{4}{x} \\ &= 1 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	$1+2\ln(2)$	$\nearrow$	

3.(a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  On a $u_0 = 8$ et $u_1 = 8 - \ln(2) \approx 7{,}31$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :
  $$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$
  On a alors, en appliquant la fonction f, qui est croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$:
  $$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$$
  Soit :
  $$1 + 2\ln(2) \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$
  Et donc a fortiori, comme $1 + 2\ln(2) \geqslant 1$:
  $$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$
  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$\boxed{1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$$

(b) D'après la question précédente, la suite (u_n) est :

- décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)
- minorée par 1 (car $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers une limite réelle } \ell}$$

(c) Pour tout $x \in \,]0\,; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x \\ &\iff \ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \\ &\iff \frac{x}{4} = 1 \\ &\iff x = 4 \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = x$ admet donc pour unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

$$\boxed{x = 4}$$

(d) La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur $]0\,;\,+\infty[$. Cette suite étant convergente, sa limite est nécessairement un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Or cette équation admet 4 pour unique solution, d'où :

$$\boxed{\ell = 4}$$

Commentaires

- Dans la question 1a, pour le calcul de u_2, il faut utiliser la valeur exacte de u_1 et pas sa valeur arrondie car cela pourrait entraîner des erreurs. On aurait également pu utiliser directement le mode « suite » de la calculatrice .
- Dans la question 1b, on peut utiliser le symbole Σ pour écrire la somme. Cela se note de la façon suivante :

$$\sum_{i=0}^{9} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9$$

- Détaillons le calcul du minimum de la fonction f dans le tableau de variations de la question 2 :

$$f(1) = 1 - \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \ln(4) = 1 + \ln\left(2^2\right) = 1 + 2\ln(2)$$

10.4 Trajectoires de drones

Énoncé

Une commune décide de remplacer le traditionnel feu d'artifice du 14 juillet par un spectacle de drones lumineux.
Pour le pilotage des drones, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$ dont l'unité est la centaine de mètres.
La position de chaque drone est modélisée par un point et chaque drone est envoyé d'un point de départ D de coordonnées $(2\,;\,5\,;\,1)$.
On souhaite former avec des drones des figures en les positionnant dans un même plan $\mathscr{P}$.
Trois drones sont positionnés aux points $A(-1\,;\,-1\,;\,17)$, $B(4\,;\,-2\,;\,4)$ et $C(1\,;\,-3\,;\,7)$.

1. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Dans la suite, on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC) et on considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) Justifier que $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.
   (b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2x - 3y + z - 18 = 0$.
3. Le pilote des drones décide d'envoyer un quatrième drone en prenant comme trajectoire

la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d \; : \; \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t + 5 \\ z = 4t + 1 \end{cases}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

(a) Déterminer un vecteur directeur de la droite d.

(b) Afin que ce nouveau drone soit également placé dans le plan $\mathscr{P}$, déterminer par le calcul les coordonnées du point E, intersection de la droite d avec le plan $\mathscr{P}$.

4. Le pilote des drones décide d'envoyer un cinquième drone le long de la droite Δ qui passe par le point D et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Ce cinquième drone est placé lui aussi dans le plan $\mathscr{P}$, soit à l'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$. On admet que le point $F(6\,;\,-1\,;\,3)$ correspond à cet emplacement.
Démontrer que la distance entre le point de départ D et le plan $\mathscr{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

5. L'organisatrice du spectacle demande au pilote d'envoyer un nouveau drone dans le plan $\mathscr{P}$ (peu importe sa position dans le plan), toujours à partir du point D. Sachant qu'il reste 40 secondes avant le début du spectacle et que le drone vole en trajectoire rectiligne à 18,6 m.s^{-1}, le nouveau drone peut-il arriver à temps ?

Correction

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -13 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), on en déduit que :

$$\boxed{\text{Les points } A,\ B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$$

2.(a) On a :

- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2 \times 5 - 3 \times (-1) + 1 \times (-13) = 10 + 3 - 13 = 0$
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 2 - 3 \times (-2) + 1 \times (-10) = 4 + 6 - 10 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est normal au plan } \mathscr{P}}$$

(b) Le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Il a donc une équation de la forme :

$$2x - 3y + z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point $A(-1\,;\,-1\,;\,17)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation. On en déduit $2 \times (-1) - 3 \times (-1) + 17 + d = 0$, soit $-2 + 3 + 17 + d = 0$ et donc $d = -18$. Le plan $\mathscr{P}$ admet donc pour équation cartésienne :

$$\boxed{2x - 3y + z - 18 = 0}$$

3.(a) On lit directement sur sa représentation paramétrique que la droite d admet pour vecteur directeur le vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}}$$

(b) On injecte les expressions de la représentation paramétrique de d dans l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned}2(3t+2)-3(t+5)+(4t+1)-18=0 &\Longleftrightarrow 6t+4-3t-15+4t+1-18=0\\&\Longleftrightarrow 7t=28\\&\Longleftrightarrow t=4\end{aligned}$$

Le point E est donc le point de paramètre $t=4$ dans la représentation paramétrique de la droite d, soit :

$$\boxed{E(14\,;\,9\,;\,17)}$$

4. La distance entre le point D et le plan $\mathscr{P}$ est la distance entre D et son projeté orthogonal sur le plan $\mathscr{P}$. Il s'agit donc de calculer la longueur DF :

$$\begin{aligned}DF &= \sqrt{(6-2)^2+(-1-5)^2+(3-1)^2}\\&=\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}\\&=\sqrt{16+36+4}\\&=\sqrt{56}\\&=\sqrt{4\times 14}\\&=2\sqrt{14}\end{aligned}$$

La distance entre le point de départ D et le plan $\mathscr{P}$ est donc, en centaines de mètres :

$$\boxed{DF=2\sqrt{14}}$$

5. La distance la plus courte pour aller du point D au plan $\mathscr{P}$ est la distance DF qui est égale à $2\sqrt{14}$ centaines de mètres. Calculons alors le temps t, en secondes, nécessaire pour parcourir cette distance :

$$t=\frac{2\sqrt{14}\times 100}{18{,}6}\approx 40{,}23$$

Cela se jouera donc à 2 dixièmes de secondes mais :

$$\boxed{\text{Le nouveau drone n'arrivera pas à temps}}$$

Commentaires

- La distance la plus courte entre un point M et un plan $\mathscr{P}$ est la distance entre le point M et son projeté orthogonal sur le plan $\mathscr{P}$. Cette distance est appelée la distance du point M au plan $\mathscr{P}$. Cela signifie que pour se déplacer d'un point à un plan, la façon la plus rapide est d'y aller de façon orthogonale.

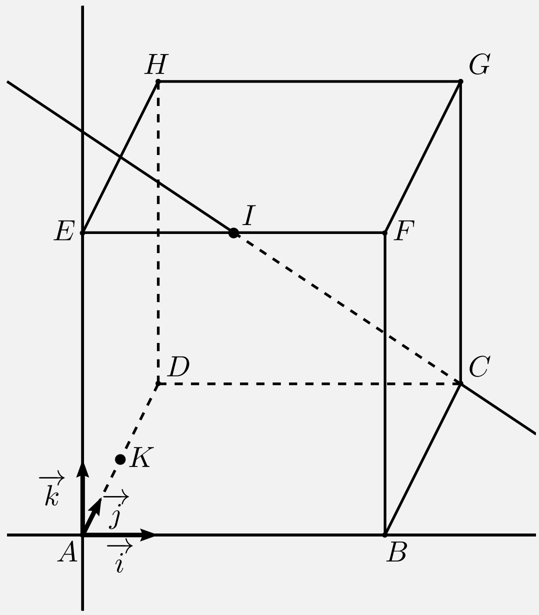
SUJET 11

MÉTROPOLE - 19 JUIN 2024 (SUJET DE SECOURS)

11.1 Une droite incluse dans un plan

Énoncé

On considère le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\,,\overrightarrow{k}\,)$ de l'espace dans lequel on place les points $B(4\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,4\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,4)$ et les points C, F, G et H de sorte que le solide $ABCDEFGH$ soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.
2. On considère le point I milieu de l'arête $[EF]$.
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par P le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de P avec (IC).

(a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan P est donnée par :

$$x + 2y - 2z - 4 = 0$$

(b) Justifier que J a pour coordonnées $\left(\frac{28}{9}\,;\,\frac{20}{9}\,;\,\frac{16}{9}\right)$. Que représente J par rapport à C ?

(c) Vérifier que le point $K(0\,;\,2\,;\,0)$ appartient au plan P.

(d) Justifier que (BK) est l'intersection des plans P et (ABC).

4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{\mathscr{B} \times h}{3}$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

   (a) Déterminer le volume de la pyramide $CBKG$.

   (b) En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.

5. Justifier que la droite (BG) est incluse dans P.

6. On note I' un point de l'arête $[EF]$, et P' le plan orthogonal à la droite $(I'C)$ passant par G.

   Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P' ?

Correction

1. On a les coordonnées :

$$\boxed{C(4\,;\,4\,;\,0)} \qquad \boxed{F(4\,;\,0\,;\,4)} \qquad \boxed{G(4\,;\,4\,;\,4)} \qquad \boxed{H(0\,;\,4\,;\,4)}$$

2. On a :

$$I\left(\frac{0+4}{2}\,;\,\frac{0+0}{2}\,;\,\frac{4+4}{2}\right) \quad \text{soit} \quad I(2\,;\,0\,;\,4)$$

Et :

$$\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}4-2\\4-0\\0-4\end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$$

La droite (IC) passe donc par le point $I(2\,;\,0\,;\,4)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}}$$

3.(a) Le plan P admet le vecteur $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$ pour vecteur normal donc également le vecteur

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, il a donc une équation cartésienne de la forme :

$$x + 2y - 2z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point $G(4\,;\,4\,;\,4)$ appartient au plan P donc ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $4 + 2 \times 4 - 2 \times 4 + d = 0$, soit $4 + d = 0$ et donc $d = -4$. On en déduit une équation cartésienne du plan P :

$$\boxed{x + 2y - 2z - 4 = 0}$$

(b) J étant le point d'intersection du plan P et de la droite (IC), ses coordonnées vérifient à la fois l'équation cartésienne de P et la représentation paramétrique de (IC). On injecte donc les expressions de la représentation paramétrique de (IC) dans l'équation cartésienne de P :

$$\begin{aligned}(2+2t) + 2(4t) - 2(4-4t) - 4 = 0 &\iff 2 + 2t + 8t - 8 + 8t - 4 = 0\\ &\iff 18t = 10\\ &\iff t = \frac{10}{18}\\ &\iff t = \frac{5}{9}\end{aligned}$$

Le point J est donc le point de paramètre $t = \dfrac{5}{9}$ dans la représentation paramétrique de la droite (IC), soit le point de coordonnées $\left(2 + 2 \times \dfrac{5}{9}\,;\, 4 \times \dfrac{5}{9}\,;\, 4 - 4 \times \dfrac{5}{9}\right)$. On a donc :

$$\boxed{J\left(\frac{28}{9}\,;\,\frac{20}{9}\,;\,\frac{16}{9}\right)}$$

Le point J est à l'intersection entre le plan P et la droite passant par C orthogonalement à C. On en déduit que :

$$\boxed{J \text{ est le projeté orthogonal de } C \text{ sur le plan } P}$$

(c) On a :

$$0 + 2 \times 2 - 2 \times 0 - 4 = 4 - 4 = 0$$

Les coordonnées du point K vérifient l'équation cartésienne de P donc :

$$\boxed{\text{Le point } K \text{ appartient au plan } P}$$

(d) Les plans P et (ABC) ne sont pas parallèles, ils sont donc sécants suivant une droite. De plus :

- Le point B appartient au plan P car ses coordonnées vérifient l'équation de P $(4 + 2 \times 0 - 2 \times 0 - 4 = 0)$ et il appartient aussi au plan (ABC) (par définition de ce plan).
- Le point K appartient au plan P (d'après la question précédente) et il appartient au plan (ABC) (car il appartient à la droite (AD)).

Les points B et K appartenant tous deux aux plans P et (ABC), on en déduit que :

$$\boxed{\text{La droite } (BK) \text{ est l'intersection des plans } P \text{ et } (ABC)}$$

4.(a) Afin de calculer le volume de la pyramide $CBKG$, on peut choisir la face CBK pour base. La hauteur correspondante est alors le segment $[CG]$. L'aire $\mathscr{A}_{CBK}$ du triangle CBK est :

$$\mathscr{A}_{CBK} = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

Et le volume $\mathscr{V}_{CBKG}$ est donné par :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{CBKG} &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{CBK} \times CG \\ &= \frac{1}{3} \times 8 \times 4 \\ &= \frac{32}{3}\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{V}_{CBKG} = \frac{32}{3}}$$

(b) D'autre part, on peut exprimer le volume de la pyramide $CBKG$ en choisissant pour base le triangle BKG. La hauteur correspondante est alors le segment $[CJ]$ et :

$$\begin{aligned}CJ &= \sqrt{\left(\frac{28}{9} - 4\right)^2 + \left(\frac{20}{9} - 4\right)^2 + \left(\frac{16}{9} - 0\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{64}{81} + \frac{256}{81} + \frac{256}{81}} \\ &= \sqrt{\frac{576}{81}} \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

On a alors, on notant $\mathscr{A}_{BKG}$ l'aire du triangle BKG :

$$\mathscr{V}_{CBKG} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{BKG} \times CJ = \frac{8}{9}\mathscr{A}_{BKG}$$

Et comme, d'après la question précédente, $\mathscr{V}_{CBKG} = \dfrac{32}{3}$, on a :

$$\frac{8}{9}\mathscr{A}_{BKG} = \frac{32}{3}$$

Et donc :

$$\mathscr{A}_{BKG} = \frac{32}{3} \times \frac{9}{8}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{A}_{BKG} = 12}$$

5. Les points B et G appartiennent tous deux au plan P donc :

$$\boxed{\text{La droite } (BG) \text{ est incluse dans } P}$$

6. I' étant un point de l'arête (EF), il existe $x \in [0\,;\,4]$ tel que :

$$I'\,(x\,;\,0\,;\,4) \quad \text{et donc} \quad \overrightarrow{CI'}\begin{pmatrix} x-4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Le plan P' étant orthogonal à la droite $(I'C)$, il admet le vecteur $\overrightarrow{CI'}$ pour vecteur normal. D'autre part, on a $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et donc :

$$\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{CI'} = 0 \times (x-4) + 4 \times 4 + 4 \times (-4) = 16 - 16 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CI'}$ sont donc orthogonaux et comme le point B appartient au plan P', le point G appartient également au plan P' et finalement :

$$\boxed{\text{La droite } (BG) \text{ est incluse dans le plan } P'}$$

Commentaires

- Dans la question 3b, on pouvait également vérifier que le point de coordonnées $\left(\dfrac{28}{9}\,;\,\dfrac{20}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$ appartenait bien à la fois au plan P (on vérifie que les coordonnées vérifient l'équation cartésienne de P) et à la droite (IC) (on montre qu'il existe un paramètre t pour lequel on obtient ces coordonnées).

11.2 Temps d'attente à une station service

Énoncé

Partie A

Suite à une étude statistique réalisée dans la station-service Carbuplus, on évalue à 0,25 la probabilité qu'un client venant alimenter son véhicule en carburant passe moins de 12 minutes dans la station avant de la quitter.

On choisit au hasard et de façon indépendante 10 clients de la station et on assimile ce choix à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 10 clients associe le nombre de ces clients ayant passé moins de 12 minutes à la station.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 4 clients dans un échantillon de 10 passent moins de 12 minutes à la station ? On arrondira si besoin le résultat à 10^{-3} près.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.
On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.

On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3.
2. (a) Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client ?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

Correction

Partie A

1. On répète 10 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès égale à 0,25. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 10 \text{ et } p = 0{,}25}$$

2. Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 4)$. On obtient à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'au moins 4 clients dans un échantillon de 10 passent moins de 12 minutes à la station est :

$$\boxed{P(X \geqslant 4) \approx 0{,}224}$$

3. On a $E(X) = n \times p = 10 \times 0{,}25 = 2{,}5$. Cela signifie que sur un échantillon de 10 clients, le nombre moyen de clients qui passent moins de 12 minutes à la station est :

$$\boxed{E(X) = 2{,}5}$$

Partie B

1. La variable aléatoire est égale au temps total donc à la somme des 3 temps, soit :

$$\boxed{S = T_1 + T_2 + T_3}$$

2. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) = 6 + 6 + 6 = 18$$

Cela signifie que le temps d'attente moyen de ce troisième client, en minutes, est :

$$\boxed{E(S) = 18}$$

(b) Les variables aléatoires T_1, T_2 et T_3 étant indépendantes, on a :

$$V(S) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3) = 1 + 1 + 1 = 3$$

La variance du temps d'attente total S de ce troisième client est donc :

$$\boxed{V(S) = 3}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|S - E(S)| \geqslant 4\right) \leqslant \frac{V(S)}{4^2}$$

Soit :

$$P\left(|S - 18| \geqslant 4\right) \leqslant \frac{3}{16}$$

Et, par passage au complémentaire :

$$P\left(|S - 18| < 4\right) \geqslant 1 - \frac{3}{16}$$

Soit :

$$P(14 < S < 22) \geqslant \frac{13}{16}$$

Or $\frac{13}{16} = 0{,}8125 \geqslant 0{,}81$ donc la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est :

$$\boxed{P(14 < S < 22) \geqslant 0{,}81}$$

Commentaires

- Dans la question 3 de la partie B, on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\boxed{P\left(|S - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{\delta^2}}$$

où $\mu = E(S)$, $V = V(S)$ et en prenant $\delta = 4$ afin d'obtenir l'encadrement souhaité.

11.3 Une fonction, une suite et une intégrale

Énoncé

Partie A : étude d'une fonction.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   (a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a :
   $$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :
   $$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$
3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :
   $$u_n \geqslant 0$$
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite (u_n).
4. On note l la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de l.
5. (a) Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```python
from math import log as ln
#permet d'utiliser la function ln :
#Le Logarithme népérien

def seuil(h):
    n=0
    u=7
    while ... :
        n = n + 1
        u = ...
    return n
```

(b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit `seuil(0.01)` dans la console Python. Justifier la réponse.

Partie C : calcul intégral.

1. Étudier le signe de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;\,4]$, on a l'encadrement :

$$0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25$$

En déduire l'encadrement :

$$1 \leqslant I \leqslant 2.$$

Correction
Partie A

1.(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{2x}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}}$$

(b) On a alors le tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
x^2+1		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$			$\nearrow$		

La dérivée étant strictement positive sauf en un point où elle s'annule, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

2. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) &= x - \ln\left(x^2\right) - \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \\ &= x - \ln\left(x^2\right) - \left(\ln\left(x^2+1\right) - \ln\left(x^2\right)\right) \\ &= x - \ln\left(x^2\right) - \ln\left(x^2+1\right) + \ln\left(x^2\right) \\ &= x - \ln\left(x^2+1\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

3. Pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = x\left(1 - 2 \times \frac{\ln(x)}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Or, par croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - 2 \times \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$$

Et :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 7 \geqslant 0$. La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

     $$u_n \geqslant 0$$

     On en déduit, en appliquant la fonction f qui est croissante sur $[0\,;+\infty[$:

     $$f(u_n) \geqslant f(0)$$

     Et comme $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$, on a :

     $$f(u_n) \geqslant 0$$

     Soit :

     $$u_{n+1} \geqslant 0$$

     La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion :**
  La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :
$$\boxed{u_n \geqslant 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= u_n - \ln(u_n^2 + 1) - u_n \\ &= -\ln(u_n^2 + 1) \end{aligned}$$
Or $u_n^2 \geqslant 0$ donc $u_n^2 + 1 \geqslant 1$ puis $\ln(u_n^2 + 1) \geqslant 0$ et finalement :
$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$
On en déduit que :
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc :
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$

4. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. De plus, on sait que la suite (u_n) converge. On en déduit que la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire que $f(l) = l$. Résolvons alors l'équation $f(x) = x$, pour $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x - \ln\left(x^2 + 1\right) = x \\ &\iff \ln\left(x^2 + 1\right) = 0 \\ &\iff x^2 + 1 = 1 \\ &\iff x^2 = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$
On en déduit que :
$$\boxed{l = 0}$$

5.(a) On peut compléter le script de la façon suivante :

```
from math import log as ln

def seuil(h) :
    n = 0
    u = 7
    while u > h :
        n = n + 1
        u = u-ln(u**2 + 1)
    return n
```

(b) La valeur renvoyée lorsque l'on saisit `seuil(0.01)` est la valeur du plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 0{,}01$. Or on obtient à l'aide de la calculatrice :

- $u_{96} \approx 0{,}01003 > 0{,}01$
- $u_{97} \approx 0{,}0099 < 0{,}01$

La valeur renvoyée est donc :

$$\boxed{97}$$

Partie C

1. La fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $f(0) = 0$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est positive sur } [0\,;+\infty[}$$

2. La fonction f étant positive sur l'intervalle $[2\,;4]$, l'intégrale I est égale à l'aire, en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.
3. On admet que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;4]$:

$$0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25$$

On a alors, par croissance de l'intégrale :

$$\int_2^4 0{,}5x - 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 0{,}25x + 0{,}25\,\mathrm{d}x$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_2^4 0{,}5x - 1\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{4}x^2 - x\right]_2^4 \\ &= \left(\frac{1}{4}\times 4^2 - 4\right) - \left(\frac{1}{4}\times 2^2 - 2\right) \\ &= 0 - (-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

Et :

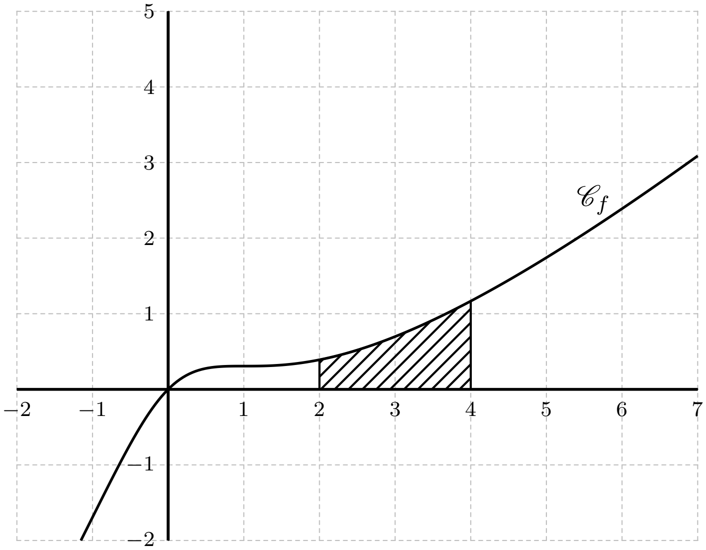
$$\begin{aligned}\int_2^4 0{,}25x + 0{,}25\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_2^4 \\ &= \left(\frac{1}{8}\times 4^2 + \frac{1}{4}\times 4\right) - \left(\frac{1}{8}\times 2^2 + \frac{1}{4}\times 2\right) \\ &= 3 - 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

On en déduit l'encadrement :

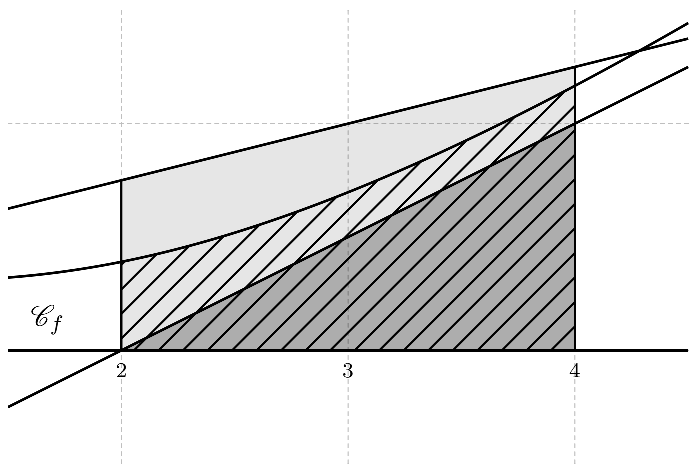
$$\boxed{1 \leqslant I \leqslant 2}$$

Commentaires

- Voici la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ainsi que le domaine correspondant à l'intégrale étudiée dans la partie C :



- Dans la question 3 de la partie C, l'encadrement de l'intégrale provient de l'encadrement de la fonction f par deux fonctions affines dont les représentations graphiques sont données ci-dessous. L'aire du domaine hachuré (égale à l'intégrale) est encadrée par les aires des parties grisées (claire et foncée). Et dans cette même question, le calcul des intégrales aurait pu se faire de manière géométrique, l'une correspondant à l'aire d'un triangle et l'autre à l'aire d'un trapèze.



11.4 Un vrai-faux d'études de fonctions

Énoncé

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3	↘	1

   (a) **Affirmation 1 :**
   La droite d'équation $y=-2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

   (b) **Affirmation 2 :**
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{f(x)-5} = +\infty$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

   (a) **Affirmation 3 :**
   Le point $A\left(2\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.

   (b) **Affirmation 4 :**
   Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\,;\,2[$, on a : $g(x) \leqslant x$.

3. **Affirmation 5 :**
   L'équation $x\ln x = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Correction

1.(a) **Affirmation 1 : Faux**

D'après la tableau de variations, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet :

- Une asymptote horizontale d'équation $y=5$ en $-\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$)
- Une asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$)
- Une asymptote verticale d'équation $x=-2$ (car $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = -\infty$)

Mais elle n'admet pas la droite d'équation $y=-2$ pour asymptote horizontale.

(b) **Affirmation 2 : Faux**

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5^-$, c'est-à-dire que lorsque x tend vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers 5 avec $f(x) < 5$. Cela découle du fait que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$ et que la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-2[$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-5) = 0^-$ et donc que :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{f(x)-5} = -\infty$$

2.(a) **Affirmation 3 : Vrai**
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (1-x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

La fonction g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g''(x) &= -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (1-x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (x-2)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
g		concave		convexe	

La fonction g'' s'annule en changeant de signe en 2 donc la courbe $\mathscr{C}_g$ admet un point d'inflexion en 2. Or $g(2) = 2\mathrm{e}^{-2}$ donc le point d'inflexion est le point de coordonnées :

$$\left(2\,;\,\frac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$$

(b) **Affirmation 4 : Vrai**
On a vu que la fonction g était concave sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2[$. La courbe $\mathscr{C}_g$ est donc en dessous de ses tangentes et, en particulier en dessous de sa tangente au point d'abscisse 0. Or $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$ donc la tangente au point d'abscisse 0 admet pour équation $y = 1(x-0)+0$, soit $y = x$. On en déduit que, pour tout $x \in]-\infty\,;\,2[$:

$$\boxed{g(x) \leqslant x}$$

3. **Affirmation 5 : Faux**
Soit h la fonction définie, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, par $h(x) = x\ln(x)$.
On a $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.
De plus la fonction h est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} h'(x) \geqslant 0 &\iff \ln(x) + 1 \geqslant 0 \\ &\iff \ln(x) \geqslant -1 \\ &\iff x \geqslant \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

D'où le tableau :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ 0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

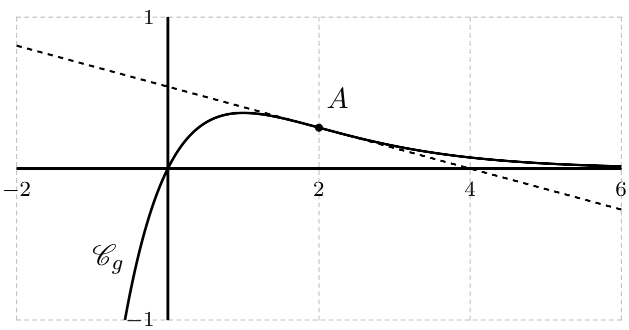
On déduit du tableau de variations que :

- L'équation $h(x) = 1$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right]$.
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$.

Finalement, l'équation $x \ln x = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Commentaires

- Voici la courbe représentative de la fonction g de question 2 ainsi que le point d'inflexion A et la tangente en ce point (qui traverse la courbe).



SUJET 12

MÉTROPOLE - 20 JUIN 2024 (SUJET DÉVOILÉ)

12.1 Des clients fidèles

Énoncé

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans. Elle constate que 60% de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47% ont acheté la carte de fidélité.
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38% ont acheté la carte de fidélité.
On interroge au hasard un client et on considère les événements suivants :

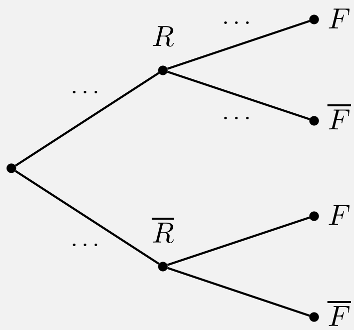
- R : « le client est un client régulier » ;
- F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un événement E quelconque, on note $\overline{E}$ son événement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1. (a) Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.

   (b) Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.

   (c) Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.



   (d) Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80% sont des clients réguliers. Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre

de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0{,}38$.
Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.

(a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.

(b) Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.
On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1 000 clients. On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.
On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.
On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

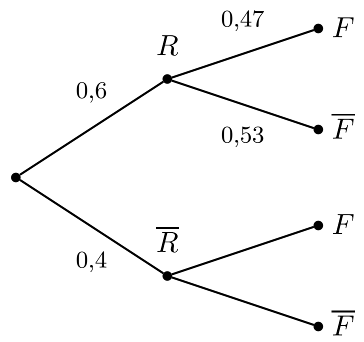
On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) au 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1\,000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice. Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,72275.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

Correction

Partie A

1.(a) On complète l'arbre de la façon suivante :



(b) Il s'agit de calculer $P(R \cap F)$:

$$\begin{aligned} P(R \cap F) &= P(R) \times P_R(F) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}47 \\ &= 0{,}282 \end{aligned}$$

La probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité est donc :

$$\boxed{P(R \cap F) = 0{,}282}$$

(c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(\overline{R} \cap F)$$

On en déduit :

$$P(\overline{R} \cap F) = P(F) - P(R \cap F) = 0{,}38 - 0{,}282 = 0{,}098$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P_{\overline{R}}(F) &= \frac{P(\overline{R} \cap F)}{P(\overline{R})} \\ &= \frac{0{,}098}{0{,}4} \\ &= 0{,}245 \end{aligned}$$

La probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier est donc :

$$\boxed{P_{\overline{R}}(F) = 0{,}245}$$

(d) Calculons $P_F(R)$:

$$\begin{aligned} P_F(R) &= \frac{P(R \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{0{,}282}{0{,}38} \\ &\approx 0{,}74 \end{aligned}$$

La probabilité que le client soit un client régulier sachant qu'il a acheté la carte de fidélité est donc d'environ 0,74, soit environ 74 %. On en déduit que :

$$\boxed{\text{L'affirmation du directeur est inexacte}}$$

2.(a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès égale à 0,38. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 20 \text{ et } p = 0{,}38}$$

(b) Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 5)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice que la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité parmi les 20 clients est :

$$\boxed{P(X \geqslant 5) \approx 0{,}927}$$

Partie B

1. La variable aléatoire X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0{,}47$. Son espérance est donc $E(X_2) = n \times p = 1\,000 \times 0{,}47 = 470$, soit :

$$\boxed{E(X_2) = 470}$$

Cela signifie que sur un échantillon de 1 000 clients réguliers, il y en a 470, en moyenne, qui ont acheté la carte de fidélité.

2. La variable aléatoire Z modélise :

$$\boxed{\text{Le montant moyen offert à chacun des } 1\,000 \text{ clients}}$$

Calculons son espérance :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E\left(\frac{Y}{1\,000}\right) \\
&= \frac{1}{1\,000}E(Y_1 + Y_2) && \textit{(linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{1\,000}\left(E(Y_1) + E(Y_2)\right) && \textit{(linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{1\,000}\left(30\,000 + 50E(X_2)\right) \\
&= \frac{1}{1\,000}\left(30\,000 + 50 \times 470\right) \\
&= 53{,}5
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{E(Z) = 53{,}5}$$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0{,}47$, sa variance est donc $V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0{,}47 \times 0{,}53 = 249{,}1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que :

$$V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2V(X_2) = 2\,500 \times 249{,}1 = 622\,750$$

Puis, comme les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes :

$$V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2) = 100\,000 + 622\,750 = 722\,750$$

Et enfin $V(Z) = \dfrac{1}{1\,000^2} V(Y) = \dfrac{722\,750}{1\,000\,000}$, soit :

$$\boxed{V(Z) = 0{,}72275}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant 1{,}8\right) \leqslant \frac{V(Z)}{1{,}8^2}$$

Soit :

$$P\left(|Z - 53{,}5| \geqslant 1{,}8\right) \leqslant \frac{0{,}72275}{3{,}24}$$

Et, par passage à l'événement contraire :

$$P\left(53{,}5 - 1{,}8 < Z < 53{,}5 + 1{,}8\right) \geqslant 1 - \frac{0{,}72275}{3{,}24}$$

Soit :

$$P\left(51{,}7 < Z < 55{,}3\right) \geqslant 1 - \frac{0{,}72275}{3{,}24}$$

Or $1 - \dfrac{0{,}72275}{3{,}24} \approx 0{,}777$ donc on a bien :

$$\boxed{P\left(51{,}7 < Z < 55{,}3\right) \geqslant 0{,}75}$$

Commentaires

- Dans la question 2 de la partie B, on utilise différentes propriétés de la variance :

  → Si X est une variable aléatoire et a un réel, alors on a :

  $$\boxed{V(aX) = a^2 V(X)}$$

  → Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors :

  $$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$$

  Attention, pour utiliser cette propriété, il faut que les variables aléatoires soient indépendantes !

- Dans la question 3 de la partie B, on utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

  $$\boxed{P\left(|X - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{\delta^2}}$$

  avec $\delta = 1{,}8$.

12.2 Équations cartésiennes et représentations paramétriques

Énoncé

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$, on considère les points $A(0\,;\,4\,;\,-1)$, $B(6\,;\,1\,;\,5)$ et $C(6\,;\,-2\,;\,-1)$. On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases}x=2+2t\\y=3-t\\z=1+2t\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et orthogonal à la droite (AB) est $2x+2y-z-9=0$.

On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathscr{D}\ :\ \begin{cases}x=3+t\\y=1+t\\z=2+t\end{cases}\quad \text{où } t\in\mathbb{R}\,;\qquad \mathscr{D}'\ :\ \begin{cases}x=2t'\\y=4-t'\\z=-1+2t'\end{cases}\quad \text{où } t'\in\mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Correction
Affirmation 1 : Vrai
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et :

- $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=2\times 6+2\times(-3)+(-1)\times 6=12-6-6=0$
- $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=2\times 6+2\times(-6)+0\times 6=12-6-6=0$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). On en déduit que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : Vrai

Les points A et B appartiennent tous les deux à la droite de représentation paramétrique $\begin{cases}x=2+2t\\y=3-t\\z=1+2t\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$. En effet A est le point de paramètre $t=-1$ et B le point de paramètre 2. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc bien $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Faux

Le plan d'équation cartésienne $2x + 2y - z - 9 = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Or ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc ce plan n'est pas orthogonal à (AB). Il ne s'agit donc pas d'une équation du plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 : Faux

La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la droite $\mathscr{D}'$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles. Déterminons leur intersection :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 3 + t = 2t' \\ 1 + t = 4 - t' \\ 2 + t = -1 + 2t' \end{cases} &\iff \begin{cases} t = 2t' - 3 \\ 1 + 2t' - 3 = 4 - t' \\ 2 + 2t' - 3 = -1 + 2t' \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} t = 2t' - 3 \\ 3t' = 6 \\ -1 = -1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} t = 1 \\ t' = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont donc sécantes et le point d'intersection est le point de paramètre $t = 1$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ et de paramètre $t' = 2$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}'$, soit le point de coordonnées $(4\,;\,2\,;\,3)$. Les droites étant sécantes, elles sont coplanaires.

Commentaires

- Pour l'affirmation 4, j'ai commencé par regarder si les droites étaient parallèles. Cela n'était finalement pas nécessaire car on démontre ensuite qu'elles sont sécantes en un unique point ce qui prouve également qu'elles ne sont pas parallèles.

12.3 La limite dépend du premier terme

Énoncé

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.
2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.
   (a) En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n < 2$$
   (b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$.

1. On donne ci-contre la fonction `u` écrite en langage Python.
   Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit `u(2,1)` et `u(2,2)` dans la console Python.

```python
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n):
        u=u**2-2*u+2
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$? On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général.

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}$.
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n).

Correction
Partie A

1.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= u_n^2 - 2u_n + 2 - 2 \\ &= u_n^2 - 2u_n \\ &= u_n(u_n - 2) \qquad \textit{(factorisation par } u_n\textit{)} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} (u_n - 1)(u_n - 2) &= u_n^2 - 2u_n - u_n + 2 \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)}$$

2.(a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question 1a, que :
  $$u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$$
  Or d'après l'énoncé, $u_n > 1$ et, par hypothèse de récurrence, $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit $u_n(u_n - 2) < 0$, soit $u_{n+1} - 2 < 0$ et donc :
  $$u_{n+1} < 2$$
  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$\boxed{u_n < 2}$$

(b)
- D'après la question 1b, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.

- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. La suite (u_n) étant convergente et la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 - 2x + 2 = x \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré qui admet deux racines : 1 et 2. Et comme la suite (u_n) est décroissante et $u_0 < 2$, la suite ne peut pas converger vers 2. On en déduit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

Partie B

1. La commande `u(2,1)` renvoie la valeur de u_1 dans le cas où $a = 2$. Or, dans ce cas, on a $u_1 = 2^2 - 2 \times 2 + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La commande } \texttt{u(2,1)} \text{ renvoie la valeur } 2}$$

De même la commande `u(2,2)` renvoie la valeur de u_2 dans le cas où $a = 2$. Or, dans ce cas, $u_2 = 2$ donc :

$$\boxed{\text{La commande } \texttt{u(2,2)} \text{ renvoie la valeur } 2}$$

2. On peut conjecturer que dans la cas où $a = 2$:

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est constante égale à } 2}$$

Partie C

1.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1} - 1) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 1\right) \\ &= \ln\left((u_n - 1)^2\right) \\ &= 2\ln(u_n - 1) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

De plus $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(a - 1)$ donc :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison 2 et de } 1^{\text{er}} \text{ terme } v_0 = \ln(a-1)}$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times 2^n$, soit $v_n = \ln(a-1) \times 2^n$. Et comme $v_n = \ln(u_n - 1)$, on a $u_n - 1 = \mathrm{e}^{v_n}$, soit $u_n = 1 + \mathrm{e}^{v_n}$ et donc :

$$\boxed{u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}}$$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a - 1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (2^n \ln(a-1)) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a - 1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$. On a alors $u_n = 1 + \mathrm{e}^0 = 1 + 1 = 2$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2}$$

- Si $a > 2$ alors $a - 1 > 1$ donc $\ln(a-1) > 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (2^n \ln(a-1)) = +\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = +\infty$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

Commentaires

- Pour montrer l'égalité de la question 1b de la partie A, il n'est pas aisé de partir d'un membre pour arriver à l'autre. Il est donc plus simple d'opter pour une présentation de la forme « d'une part... d'autre part... ». Cependant on aurait tout de même pu dérouler les calculs directement en remarquant que le polynôme $x^2 - 3x + 2$ admet deux racines : 1 et 2. Il peut donc se factoriser de la façon suivante :
$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$
D'où l'égalité :
$$u_n^2 - 3u_n + 2 = (u_n - 1)(u_n - 2)$$
- Dans la question 2a, on démontre que la suite (u_n) est majorée par 2. Au vu de l'enchaînement des questions, on pense que l'on va devoir utiliser ce résultat dans la suite. Il n'en ai rien car pour montrer la convergence de la suite, on utilise le fait que celle-ci est minorée par 1 et on n'a que faire de savoir qu'elle est majorée par 2. Est-ce un piège ? Je ne sais pas.
- Dans la question 2b, pour la résolution de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$, on peut, au choix :
  → Utiliser directement la calculatrice qui sait très bien résoudre ce type d'équation.
  → Remarquer que le nombre 1 est racine évidente et utiliser le fait que le produit des racines est égal à $\frac{c}{a}$ (avec les notations habituelles).
  → Calculer le discriminant et appliquer les formules.
- Dans la question 2 de la partie B, on conjecture que la suite (u_n) est constante égale à 2. Ce résultat peut se démontrer à l'aide d'une récurrence très rapide. Plus précisément, on montre par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété « $u_n = 2$ ».

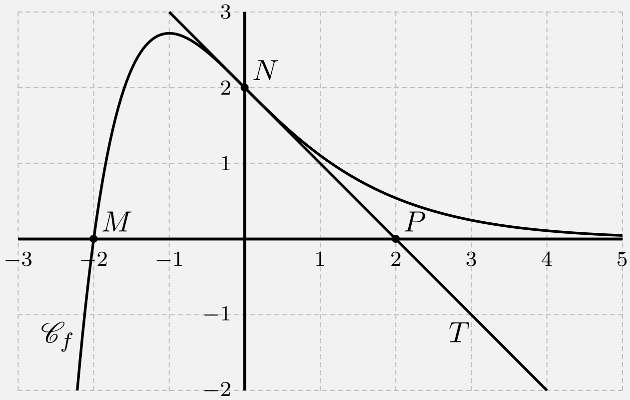
12.4 Représentation graphique d'une primitive

Énoncé

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.
Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point $N(0\,;\,2)$;
- le point $M(-2\,;\,0)$ appartenant à $\mathscr{C}_f$ et $P(2\,;\,0)$ appartenant à la tangente T.

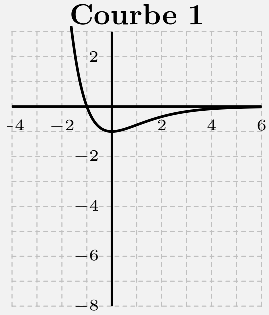
On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.



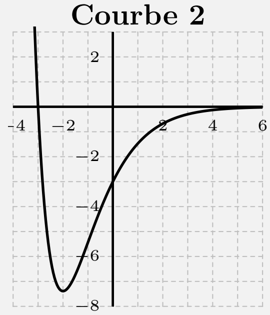
Partie A : étude graphique.
On répondra aux questions en utilisant le graphique.

1. (a) Donner $f(0)$.
   (b) Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

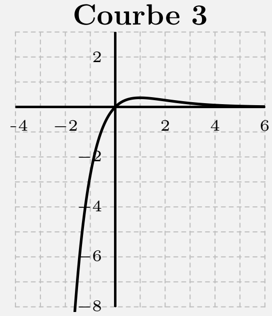
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Partie B : recherche d'une expression algébrique.
On admet que la fonction f est de la forme $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{\lambda x}$, où a, b et λ sont des constantes réelles. Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique.
On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.
3. (a) Étudier la convexité de f.
   (b) Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
4. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on pose :
$$I(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
   (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$$I(t) = (-t-3)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^2.$$
   (b) En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.

Correction

Partie A

1. (a) On lit graphiquement :
$$\boxed{f(0) = 2}$$
   (b) Il s'agit du coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. On lit alors :
$$\boxed{f'(0) = -1}$$
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en un unique point : le point de coordonnées $(-2\,;\,0)$. L'équation $f(x) = 0$ admet donc pour unique solution :
$$\boxed{x = -2}$$
3. On peut remarquer que sur $]-\infty\,;\,0]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est sous la tangente T. La fonction f ne peut donc pas être convexe. Plus précisément, on peut conjecturer que :
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est concave sur }]-\infty\,;\,0] \text{ et convexe sur } [0\,;\,+\infty[}$$

4. Si F est une primitive de f alors $F' = f$. On peut alors construire le tableau de variations de F :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘		↗	

La seule courbe qui peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\boxed{\text{La courbe 2}}$$

Partie B

1. D'après la question 1a de la partie A, on sait que $f(0) = 2$. Or :

$$f(0) = (a \times 0 + b)\mathrm{e}^{\lambda \times 0} = b \times 1 = b$$

On a donc :

$$\boxed{b = 2}$$

2. D'après la question 2 de la partie A, on sait que $f(-2) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(-2) = 0 &\iff (a \times (-2) + b)\mathrm{e}^{\lambda \times (-2)} = 0 \\ &\iff (-2a + b)\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0 \\ &\iff -2a + b = 0 \qquad\qquad \textit{(car } \mathrm{e}^{-2\lambda} \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{-2a + b = 0}$$

Et comme $b = 2$, on a $-2a + 2 = 0$ d'où $-2a = -2$ et donc :

$$\boxed{a = 1}$$

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x + 2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda x + 2\lambda + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

On a donc $f'(0) = (2\lambda + 1)\mathrm{e}^0 = 2\lambda + 1$. Or, d'après la question 1b, $f'(0) = -1$:

$$\begin{aligned} f'(0) = -1 &\iff 2\lambda + 1 = -1 \\ &\iff 2\lambda = -2 \\ &\iff \lambda = -1 \end{aligned}$$

On a donc $\lambda = -1$, soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-x}}$$

Partie C

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (x+2) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty \end{cases}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Justifions les valeurs du tableau :

- $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = 1 \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ par croissance comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^{-x} = 0$.

3.(a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (-1+x+1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= x\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$ est du signe de x, d'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

(b) La fonction dérivée seconde s'annule en changeant de signe en 0 donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0, c'est-à-dire au point :

$$\boxed{N(0\,;\,2)}$$

4.(a) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $x \in [-2\,;\,t]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x+2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{t}(x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} - \int_{-2}^{t} -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + (-2+2)\mathrm{e}^{2} + \int_{-2}^{t}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} \\ &= (-t-2)\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2} \\ &= (-t-3)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I(t) = (-t-3)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}}$$

(b) Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}\left((-t-3)\mathrm{e}^{-t}\right) = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} I(t) = \mathrm{e}^{2}}$$

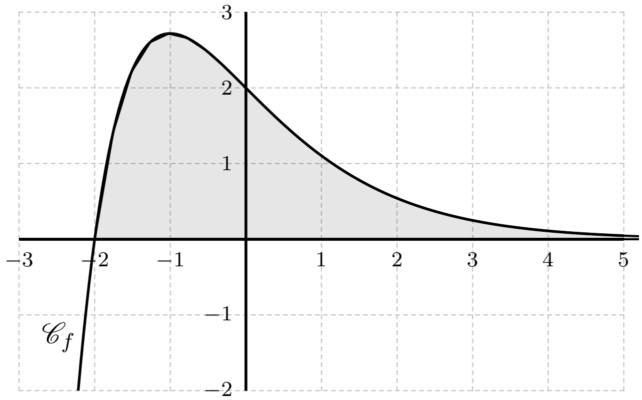
L'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ entre -2 et $+\infty$ est donc égale à e^2. Il s'agit donc d'une surface non limitée dont l'aire est finie.

Commentaires

- Dans la question 2 de la partie C, on peut justifier ainsi l'étude du signe de $-x-1$:

$$\begin{aligned}-x-1 \geqslant 0 &\iff -x \geqslant 1 \\ &\iff x \leqslant -1\end{aligned}$$

- Le domaine considéré dans la question 4b de la partie C est grisé sur la figure suivante :



SUJET 13

SUÈDE - 7 JUIN 2024

13.1 Un vrai-faux en vrac

Énoncé **(4 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y = -6x + 1$.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 6x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Affirmation 3 : On considère la suite (u_n) définie dans l'affirmation 2.
L'instruction `suite(50)` ci-dessous, écrite en langage Python, renvoie u_{50}.

```python
def suite(k) :
   S = 0
   for i in range(k) :
      S = S + (3/4)**k
   return S
```

Affirmation 4 : Soit a un réel et f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = a\ln(x) - 2x$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(0\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.
Il existe une valeur de a pour laquelle la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Correction

- **Affirmation 1 : Faux**
  La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 6$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) - 2f(x) &= 2\mathrm{e}^{2x} - 6 - 2\left(\mathrm{e}^{2x} - 6x + 1\right) \\ &= 2\mathrm{e}^{2x} - 6 - 2\mathrm{e}^{2x} + 12x - 2 \\ &= 12x - 8 \end{aligned}$$

  La fonction f n'est donc pas solution de l'équation différentielle $y' - 2y = -6x + 1$.

- **Affirmation 2 : Faux**
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est égal à la somme des terme d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{3}{4}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} = 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

  Or $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

- **Affirmation 3 : Faux**
  L'instruction `for i in range(k)` permet de faire varier `i` entre `0` et `k-1`. Si l'on souhaite faire varier `i` entre `0` et `k`, il faut donc utiliser `for i in range(k+1)`. De plus, il faut utiliser l'indice `i` dans la boucle et non `k` (qui ne varie pas). Une fonction correcte serait donc :

```
def suite(k) :
    S = 0
    for i in range(k+1) :
        S = S + (3/4)**i
    return S
```

- **Affirmation 4 : Vrai**
  La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{a}{x} - 2 \quad \text{et donc} \quad f'(1) = a - 2$$

  On a alors, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(1) = 0 &\iff a - 2 = 0 \\ &\iff a = 2 \end{aligned}$$

  On en déduit que pour $a = 2$, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Commentaires

- La formule donnant la somme S des premiers termes d'une suite géométrique de raison q :

$$\boxed{S = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}}$$

- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point est égal au nombre dérivé de la fonction en ce point. En particulier, une courbe admet une tangente horizontale en un point si et seulement si le nombre dérivé est nul en ce point.

13.2 Réussite d'un service de volley-ball

Énoncé **(5 points)**

Au cours d'une séance, un joueur de volley-ball s'entraîne à faire des services. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,85.
On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- Si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à 0,6.
- Si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant est égale à 0,6.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'événement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'événement contraire.

Partie A :
On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'événement R_2 est égale à 0,57.
3. Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.
4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de services réussis au cours des deux premiers services.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de Z (on pourra utiliser l'arbre pondéré de la question 1).
   (b) Calculer l'espérance mathématiques $E(Z)$ de la variable aléatoire Z. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B :
On s'intéresse maintenant au cas général. Pour tout entier naturel n non nul, on note x_n la probabilité de l'événement R_n.

1. (a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}})$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0{,}2x_n + 0{,}4$.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = x_n - 0{,}5$.

(a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

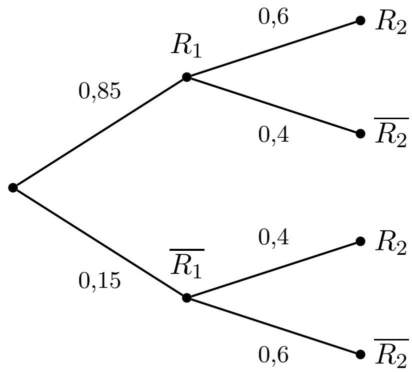
(b) Déterminer l'expression de x_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (x_n).

(c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Correction

Partie A :

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



2. Les événements R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R_2) &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(R_2) \\ &= 0{,}85 \times 0{,}6 + 0{,}15 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}57 \end{aligned}$$

La probabilité de l'événement R_2 est donc :

$$\boxed{P(R_2) = 0{,}57}$$

3. Il s'agit de calculer $P_{R_2}(\overline{R_1})$:

$$\begin{aligned} P_{R_2}(\overline{R_1}) &= \frac{P(\overline{R_1} \cap R_2)}{P(R_2)} \\ &= \frac{0{,}15 \times 0{,}4}{0{,}57} \\ &= \frac{2}{19} \end{aligned}$$

Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, la probabilité qu'il ait raté le premier est :

$$\boxed{P_{R_2}(\overline{R_1}) = \frac{2}{19} \approx 0{,}1053}$$

4.(a) La variable aléatoire Z peut prendre pour valeurs 0, 1 et 2 et on a :

- $P(Z = 0) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = 0{,}15 \times 0{,}6 = 0{,}09$

- $P(Z=1) = P(R_1 \cap \overline{R_2}) + P(\overline{R_1} \cap R_2) = 0{,}85 \times 0{,}4 + 0{,}15 \times 0{,}4 = 0{,}4$
- $P(Z=2) = P(R_1 \cap R_2)) = 0{,}85 \times 0{,}6 = 0{,}51$

La loi de probabilité de Z est donc donnée dans le tableau suivants :

k	0	1	2
$P(Z=k)$	0,09	0,4	0,51

(b) On a :

$$\begin{aligned} E(Z) &= 0 \times P(Z=0) + 1 \times P(Z=1) + 2 \times P(Z=2) \\ &= 0 \times 0{,}09 + 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}51 \\ &= 1{,}42 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{E(Z) = 1{,}42}$$

Cela signifie, qu'en moyenne, sur les deux premiers services, le joueur en réussi 1,42.

Partie B :

1.(a) Lorsqu'il réussit le n-ième service, la probabilité qu'il réussisse le $n+1$-ième est égale à 0,6, soit :

$$\boxed{P_{R_n}(R_{n+1}) = 0{,}6}$$

Lorsqu'il ne réussit pas le n-ième service, la probabilité qu'il ne réussisse pas le $n+1$-ième est égale à 0,6, soit :

$$\boxed{P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}}) = 0{,}6}$$

(b) Les événements R_n et $\overline{R_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R_{n+1}) &= P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \\ &= x_n \times 0{,}6 + (1 - x_n) \times 0{,}4 \\ &= 0{,}6x_n + 0{,}4 - 0{,}4x_n \\ &= 0{,}2x_n + 0{,}4 \end{aligned}$$

Soit, pour tout entier naturel non nul n :

$$\boxed{x_{n+1} = 0{,}2x_n + 0{,}4}$$

2.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= x_{n+1} - 0{,}5 \\ &= 0{,}2x_n + 0{,}4 - 0{,}5 \\ &= 0{,}2x_n - 0{,}1 \\ &= 0{,}2(x_n - 0{,}5) \\ &= 0{,}2u_n \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } 0{,}2 \text{ et de premier terme } u_1 = 0{,}85 - 0{,}5 = 0{,}35}$$

(b) On déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times 0{,}2^{n+1}$, soit $u_n = 0{,}85 \times 0{,}2^{n-1}$. Et comme $u_n = x_n - 0{,}5$, $x_n = u_n + 0{,}5$, soit :

$$\boxed{x_n = 0{,}85 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}5}$$

On a $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(0{,}2^{n-1}\right) = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = 0{,}5}$$

(c) À long terme, la probabilité que le joueur réussisse un service se rapproche de 0,5.

Commentaires

- Dans la question , l'énoncé ne précise pas s'il faut arrondir le résultat. On peut donc supposer que c'est la valeur exacte qui est attendue, soit $\dfrac{2}{19}$. Personnellement, j'ai pour coutume d'arrondir les probabilités à 10^{-4} près, soit 0,1053.

13.3 Certification d'un appareil de chauffage

Énoncé **(7 points)**

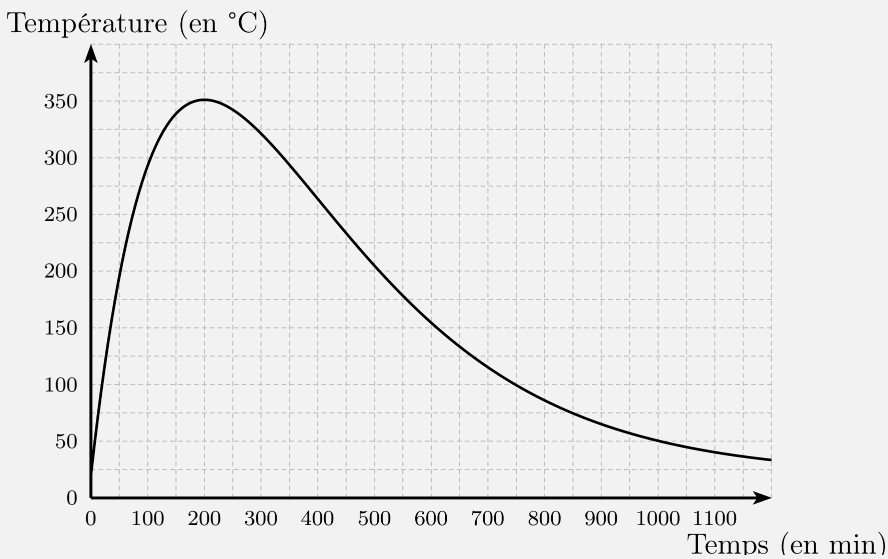
Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : appareil de la marque A

À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de la marque A.

On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.



Par lecture graphique :

1. Donner le temps au bout duquel la température maximale est atteinte à l'intérieur du foyer.
2. Donner une valeur approchée, en minutes, de la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse 300°C.
3. On note f la fonction représentée sur le graphique.
   Estimer la valeur de $\dfrac{1}{600}\displaystyle\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t$. Interpréter le résultat.

Partie 2 : étude d'une fonction
Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = 10t\mathrm{e}^{-0,01t} + 20$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, $g'(t) = (-0,1t + 10)\mathrm{e}^{-0,01t}$.
   (b) Étudier les variations de la fonction g sur $[0\,;+\infty[$ et construire son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0\,;+\infty[$. En donner des valeurs approchées à l'unité.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie 3 : évaluation
Pour un appareil de la marque B, la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer t minutes après l'allumage est modélisée sur $[0\,;600]$ par la fonction g.

L'organisme certificateur attribue une étoile par critère validé parmi les quatre suivants :

- Critère 1 : la température maximale est supérieure à 320°C.
- Critère 2 : la température maximale est atteinte en moins de 2 heures.
- Critère 3 : la température moyenne durant les 10 premières heures après l'allumage dépasse 250°C.
- Critère 4 : la température à l'intérieur du foyer ne doit pas dépasser 300°C pendant plus de 5 heures.

Chaque appareil obtient-il exactement trois étoiles ? Justifier votre réponse.

Correction
Partie 1

1. On lit graphiquement que la température maximale est atteint au bout de :

$$\boxed{200 \text{ minutes}}$$

2. La température dépasse 300°C au bout d'environ 100 minutes et passe de nouveau en-dessous de 300°C après environ 350 minutes. La température à l'intérieur du foyer dépasse 300°C pendant environ :

$$\boxed{250 \text{ minutes}}$$

3. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 600$. Or on peut évaluer que ce domaine est environ égal à 124 carreaux et, comme l'aire d'un carreau est égale à $50 \times 25 = 1\,250$ unités d'aires, l'intégrale est égale à environ $124 \times 1\,250 = 155\,000$. On peut alors estimer :

$$\boxed{\frac{1}{600}\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 258}$$

Cela signifie que la température moyenne du four au cours des 600 premières minutes est d'environ 258°C.

Partie 2

1. Par croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} t\mathrm{e}^{-0{,}01t} = 0$ donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(t) = 20}$$

2.(a) La fonction g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} g'(t) &= 10\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 10t \times (-0{,}01)\mathrm{e}^{-0{,}01t} \\ &= 10\mathrm{e}^{-0{,}01t} - 0{,}1t\mathrm{e}^{-0{,}01t} \\ &= (-0{,}1t + 10)\mathrm{e}^{-0{,}01t} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{g'(t) = (-0{,}1t + 10)\mathrm{e}^{-0{,}01t}}$$

(b) Pour tout $[0\,;+\infty[$, $\mathrm{e}^{-0{,}01t} > 0$ donc $g'(t)$ est du signe de $(-0{,}1t + 10)$, d'où le tableau :

x	0		100		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	20	$\nearrow$	$f(100)$	$\searrow$	20

3. • Sur l'intervalle $[0\,;100]$, la fonction g est continue et strictement croissante. De plus $f(0) = 20 < 300$ et $f(100) \approx 388 > 300$. On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(t) = 300$ admet une unique solution α sur $[0\,;100]$.
   • Sur l'intervalle $[100\,;+\infty[$, la fonction g est continue et strictement décroissante. De plus $f(100) \approx 388 > 300$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t) = 20 < 300$. On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $g(t) = 300$ admet une unique solution β sur $[100\,;+\infty[$.

   Finalement, l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0\,;+\infty[$ et on obtient, à l'aide de la calculatrice :

$$\boxed{\alpha \approx 43} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta \approx 193}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{600} 10t\mathrm{e}^{-0,01t} + 20\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{600} 10t\mathrm{e}^{-0,01t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{600} 20\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{600} 10t\mathrm{e}^{-0,01t}\,\mathrm{d}t + 12\,000
\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{cases} u(t) = 10t \\ v'(t) = \mathrm{e}^{-0,01t} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) = 10 \\ v(t) = -100\mathrm{e}^{-0,01t} \end{cases}$$

On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^{600} 10t\mathrm{e}^{-0,01t}\,\mathrm{d}t &= \Big[10t \times (-100\mathrm{e}^{-0,01t})\Big]_0^{600} - \int_0^{600} 10 \times (-100\mathrm{e}^{-0,01t})\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[-1\,000t\mathrm{e}^{-0,01t}\Big]_0^{600} + \int_0^{600} 1\,000\mathrm{e}^{-0,01t}\,\mathrm{d}t \\
&= -600\,000\mathrm{e}^{-6} + 1\,000 \times 0\mathrm{e}^{0} + \Big[-100\,000\mathrm{e}^{-0,01t}\Big]_0^{600} \\
&= -600\,000\mathrm{e}^{-6} - 100\,000\mathrm{e}^{-6} + 100\,000\mathrm{e}^{0} \\
&= 100\,000 - 700\,000\mathrm{e}^{-6}
\end{aligned}$$

Et finalement :

$$\boxed{\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t = 112\,000 - 700\,000\mathrm{e}^{-6} \approx 110\,265}$$

Partie 3

- Pour l'appareil A :
  - ✔ la température maximale est supérieure à 320°C (elle est d'environ 350°C).
  - ✖ la température maximale n'est pas atteinte en moins de 2 heures (elle est atteinte en 200 minutes).
  - ✔ la température moyenne durant les 10 premières heures (donc les 600) premières minutes est supérieure à 250°C (elle est d'environ 258°C).
  - ✔ la température à l'intérieur du foyer ne dépasse pas 300°C pendant plus de 5 heures (elle les dépasse pendant environ 250 minutes).

$$\boxed{\text{L'appareil A obtient donc exactement 3 étoiles}}$$

- Pour l'appareil B :
  - ✔ la température maximale est supérieure à 320°C (elle est d'environ 388°C).
  - ✔ la température maximale est atteinte en moins de 2 heures (elle est atteinte en 100 minutes).
  - ✖ la température moyenne durant les 10 premières heures (donc les 600) premières minutes n'est pas supérieure à 250°C (elle est d'environ $\frac{110\,265}{600} \approx 184$°C).
  - ✔ la température à l'intérieur du foyer ne dépasse pas 300°C pendant plus de 5 heures (elle les dépasse pendant environ 150 minutes entre la 43-ième minute et la 93-ième).

$$\boxed{\text{L'appareil B obtient donc exactement 3 étoiles}}$$

Commentaires

- Dans la question 1, l'argument « par croissances comparées » est un peu rapide. Si l'on veut se ramener à la formule du cours, on peut écrire :

$$te^{-0,01t} = -100 \times (-0,01t)e^{-0,01t}$$

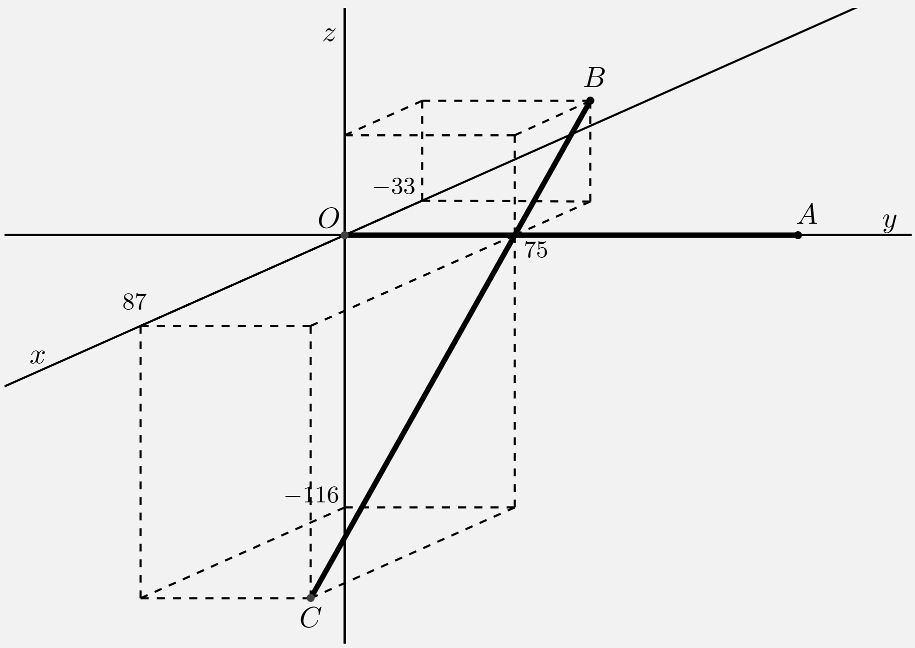
On se ramène ainsi à une expression de la forme $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x$.

13.4 Voltige aérienne

Énoncé **(4 points)**

On modélise un passage de spectacle de voltige aérienne en duo de la manière suivante :

- on se place dans un repère orthonormé $(0\,;\, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une unité représentant un mètre ;
- l'avion n° 1 doit relier le point O au point $A(0\,;\,200\,;\,0)$ selon une trajectoire rectiligne, à la vitesse constante de 200 m/s ;
- l'avion n° 2 doit, quant à lui, relier le point $B(-33\,;\,75\,;\,44)$ au point $C(87\,;\,75\,;\,-116)$ également selon une trajectoire rectiligne, et à la vitesse constante de 200 m/s.
- au même instant, l'avion n° 1 est au point O et l'avion n° 2 est au point B.



1. Justifier que l'avion n° 2 mettra autant de temps à parcourir le segment $[BC]$ que l'avion n° 1 à parcourir le segment $[0A]$.
2. Montrer que les trajectoires des deux avions se coupent.
3. Les deux avions risquent-ils de se percuter lors de ce passage ?

Correction

1. On a :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(87-(-33))^2+(75-75)^2+(-116-44)^2} \\ &= \sqrt{120^2+0^2+(-160^2)} \\ &= \sqrt{40\,000} \\ &= 200 \end{aligned}$$

   Et on a directement $OA = 200$, soit :

$$\boxed{OA = 200} \quad \text{et} \quad \boxed{BC = 200}$$

   Et comme les avions volent tous les deux à la même vitesse, l'avion nº 2 mettra autant de temps à parcourir le segment $[BC]$ que l'avion nº 1 à parcourir le segment $[0A]$.

2. Il s'agit de montrer que les segments $[OA]$ et $[BC]$ sont sécants. Les droites (OA) et (BC) admettent pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -33+120t' \\ y = 75 \\ z = 44-160t' \end{cases} \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R}$$

   Déterminons l'intersection de ces deux droites :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 = -33+120t' \\ t = 75 \\ 0 = 44-160t' \end{cases} &\iff \begin{cases} 120t' = 33 \\ t = 75 \\ 160t' = 44 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t' = \dfrac{33}{120} \\ t = 75 \\ t' = \dfrac{44}{160} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t = 75 \\ t' = 0{,}275 \end{cases} \end{aligned}$$

   Les deux droites sont donc sécantes au point de paramètre $t = 75$ dans la représentation paramétrique de (OA) et de paramètre $t' = 0{,}275$ dans celle de (BC), c'est-à-dire au point :

$$\boxed{H(0\,;\,75\,;\,0)}$$

   Et ce point appartient bien aux deux segments donc :

$$\boxed{\text{Les trajectoires des deux avions se coupent}}$$

3. • L'avion nº 1 se trouve au point O, de paramètre $t = 0$, au bout de 0 seconde et au point A, de paramètre $t = 200$, au bout d'une seconde. Il passe donc par le point H, de paramètre $t = 75$ après $\dfrac{75}{200} = 0{,}375$ seconde.

- L'avion n° 2 se trouve au point B, de paramètre $t' = 0$, au bout de 0 seconde et au point C, de paramètre $t' = 1$, au bout d'une seconde. Il passe donc par le point H, de paramètre $t' = 0{,}275$ après 0,275 seconde.

Les avions passent au point d'intersection de leurs trajectoires à 0,1 seconde d'écart. L'avion n° 2 aura donc parcouru 20 mètres au moment où l'avion n° 1 passera au point H. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Les deux avions ne devraient pas se percuter}}$$

Commentaires

- Afin d'obtenir une représentation paramétrique de la droite (BC), on utilise le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 87-(-33) \\ 75-75 \\ -116-44 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ -160 \end{pmatrix}$.
- Les paramètres t et t' peuvent être vus comme le temps écoulé à partir de l'instant 0. Cependant, avec les représentations paramétriques que j'ai choisies, le temps ne s'écoule pas à la même vitesse. Si l'on souhaite que le temps s'écoule en seconde pour les deux représentations, on aurait dû choisir la représentation paramétrique suivante pour la droite (OA) :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 200t \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$$

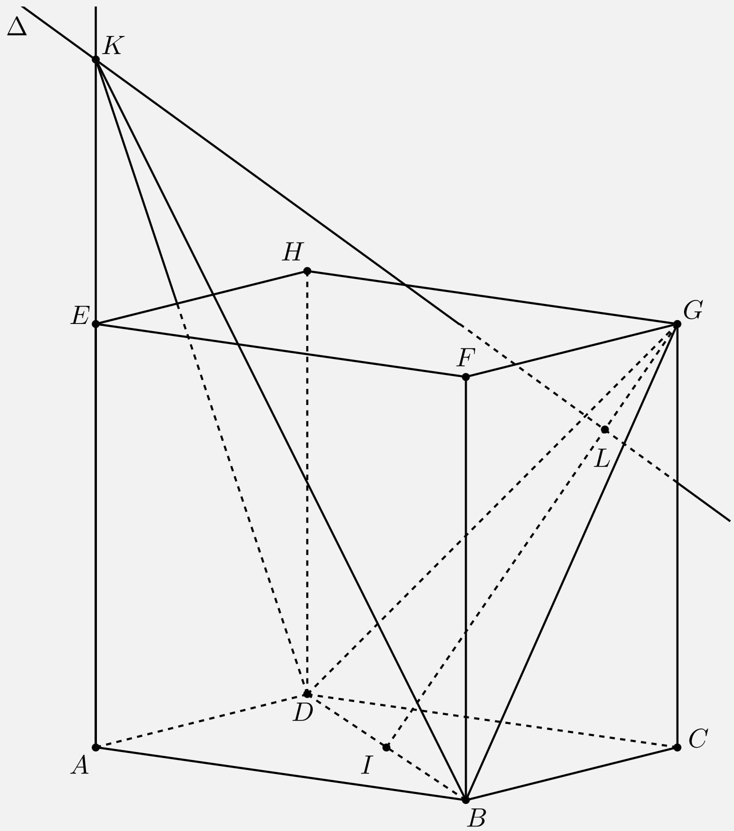
SUJET 14

MÉTROPOLE - 11 SEPTEMBRE 2024 (REMPLACEMENT)

14.1 Pyramide à hauteur variable

Énoncé **(6 points)**

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.



Le point I est le milieu du segment $[BD]$. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$.

1.(a) Préciser les coordonnées des points D, B, I et G. Aucune justification n'est attendue.

(b) Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}\,;\,\frac{7}{8}\,;\,\frac{3}{4}\right)$.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x+y-z-1=0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

(a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{8}+t \\ y = \frac{7}{8}+t \\ z = \frac{3}{4}-t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

(b) Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0\,;\,0\,;\,\frac{13}{8}\right)$.

(c) Que représente le point L pour le point K ? Justifier la réponse.

4.(a) Calculer la distance KL.

(b) On admet que le triangle DBG est équilatéral. Montrer que son aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) En déduire le volume du tétraèdre $KDBG$.
On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base ;
- un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,a)$.

(a) Exprimer le volume $\mathscr{V}_a$ de la pyramide $ABCDK_a$ en fonction de a.

(b) On note Δ_a la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t'+a \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG). Montrer que les coordonnées du point L_a sont $\left(\frac{a+1}{3}\,;\,\frac{a+1}{3}\,;\,\frac{2a-1}{3}\right)$.

(c) Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre $GBDK_a$ et la pyramide $ABCDK_a$ soient de même volume.

Correction

1.(a) On a :

$$\boxed{D(0\,;\,1\,;\,0)} \qquad \boxed{B(1\,;\,0\,;\,0)} \qquad \boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)} \qquad \boxed{G(1\,;\,1\,;\,1)}$$

(b) Soit $(x_L\,;\,y_L\,;\,z_L)$.

On a $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\ 1-\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$ puis $\frac{3}{4}\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix}\frac{3}{8}\\ \frac{3}{8}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}x_L-\frac{1}{2}\\ y_L-\frac{1}{2}\\ z_L\end{pmatrix}$ d'où :

$$\overrightarrow{IL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IG}\iff\begin{cases}x_L-\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\\ y_L-\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\\ z_L=\frac{3}{4}\end{cases}\iff\begin{cases}x_L=\frac{7}{8}\\ y_L=\frac{7}{8}\\ z_L=\frac{3}{4}\end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{L\left(\frac{7}{8}\,;\,\frac{7}{8}\,;\,\frac{3}{4}\right)}$$

2. Il suffit de vérifier que les coordonnées des points B, D et G vérifient l'équation donnée.
   - $1+0-0-1=0$ donc les coordonnées de B vérifient l'équation.
   - $0+1-0-1=0$ donc les coordonnées de D vérifient l'équation.
   - $1+1-1-1=0$ donc les coordonnées de G vérifient l'équation.

   Les coordonnées des trois points vérifient l'équation donc une équation du plan (BDG) est :

$$\boxed{x+y-z-1=0}$$

3.(a) D'après son équation cartésienne, le plan (BDG) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ et comme la droite Δ est perpendiculaire au plan (BDG), elle admet le vecteur $\overrightarrow{n}$ pour vecteur directeur. De plus, elle passe par le point $L\left(\frac{7}{8}\,;\,\frac{7}{8}\,;\,\frac{3}{4}\right)$. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases}x=\frac{7}{8}+t\\ y=\frac{7}{8}+t\\ z=\frac{3}{4}-t\end{cases}\quad\text{avec } t\in\mathbb{R}.}$$

(b) Le point $K\left(0\,;\,0\,;\,\frac{13}{8}\right)$ appartient évidemment à l'axe (AE). Il appartient également à la droite Δ car c'est le point de paramètre $t=-\frac{7}{8}$ dans la représentation paramétrique précédente. Le point K appartient donc à la fois à la droite (AE) et à la droite Δ et, comme ces droites ne sont pas confondues, on en déduit que :

$$\boxed{\text{les droites } \Delta \text{ et } (AE) \text{ sont sécantes au point } K \text{ de coordonnées } \left(0\,;\,0\,;\,\frac{13}{8}\right)}$$

(c) Le point L est le point d'intersection du plan (BDG) et de la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par K. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point } L \text{ est le projeté orthogonal du point } K \text{ sur le plan } (BDG)}$$

4.(a) On a :

$$\begin{aligned} KL &= \sqrt{\left(\frac{7}{8}-0\right)^2+\left(\frac{7}{8}-0\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{13}{8}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(-\frac{7}{8}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{49}{64}+\frac{49}{64}+\frac{49}{64}} \\ &= \sqrt{\frac{147}{64}} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{KL = \frac{7\sqrt{3}}{8}}$$

(b) Le triangle DBG étant équilatéral, le pied de la hauteur issue de G est le point I, son aire est donc $\mathscr{A}_{GBD} = \dfrac{BD \times GI}{2}$. Or on a :

$$BD = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad GI = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

D'où :

$$\mathscr{A}_{GBD} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'aire du triangle BDG est donc bien :

$$\boxed{\mathscr{A}_{GBD} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(c) Le volume du tétraèdre $KDBG$ est donc :

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{GBD} \times KL = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{7\sqrt{3}}{8} = \frac{7}{16}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{V} = \frac{7}{16}}$$

5.(a) La pyramide $ABCDK_a$ est une pyramide à base carrée, dont la base est le carré $ABCD$ d'aire égale à 1 et la hauteur est $AK_a = a$. Son volume est donc :

$$\boxed{\mathscr{V}_a = \frac{1}{3}a}$$

(b) Déterminons les coordonnées du point L_a, intersection du plan (BDG) et de la droite Δ_a. On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de Δ_a dans l'équation cartésienne du plan (BDG) :

$$\begin{aligned} t' + t' - (-t' + a) - 1 = 0 &\iff t' + t' + t' - a - 1 = 0 \\ &\iff 3t' = a + 1 \\ &\iff t' = \frac{a+1}{3} \end{aligned}$$

Le point L_a est donc le point de paramètre $t' = \dfrac{a+1}{3}$, soit le point de coordonnées $\left(\dfrac{a+1}{3} ; \dfrac{a+1}{3} ; -\dfrac{a+1}{3} + a\right)$, d'où :

$$\boxed{L_a \left(\frac{a+1}{3} ; \frac{a+1}{3} ; \frac{2a-1}{3}\right)}$$

(c) On peut remarquer que la droite Δ_a est la droite perpendiculaire au plan (BDG) passant par K_a. Le point L_a est donc le projeté orthogonal de K_a sur (BDG). Le volume du tétraèdre $GBDK_a$ est donc :

$$\mathscr{V}_{GBDK_a} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{GBD} \times K_aL_a$$

Or :

$$\begin{aligned} K_aL_a &= \sqrt{\left(\frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a-1}{3} - a\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-a-1}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{3 \times \left(\frac{a+1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{(a+1)\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Et donc :

$$\mathscr{V}_{GBDK_a} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{(a+1)\sqrt{3}}{3} = \frac{a+1}{6}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_{GBDK_a} = \mathscr{V}_a &\iff \frac{a+1}{6} = \frac{1}{3}a \\ &\iff 2a = a + 1 \\ &\iff a = 1 \end{aligned}$$

Le tétraèdre $GBDK_a$ et la pyramide $ABCDK_a$ sont donc de même volume si et seulement si :

$$\boxed{a = 1}$$

Commentaires

- Dans la question 5b, les coordonnées du point étant données, on pouvait également vérifier que ces coordonnées vérifiaient à la fois l'équation du plan et le système d'équations paramétriques de la droite.

14.2 Profil d'un bonbon

Énoncé **(5 points)**

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montagne locale comme représenté en Figure 1. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 cm (Figure 2).

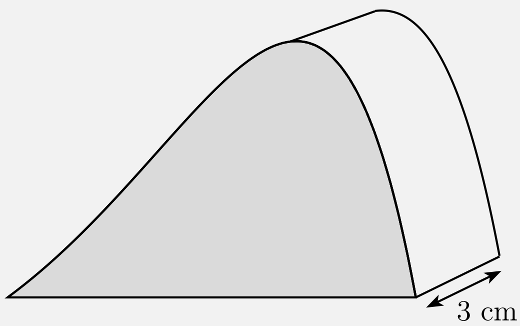


Figure 1

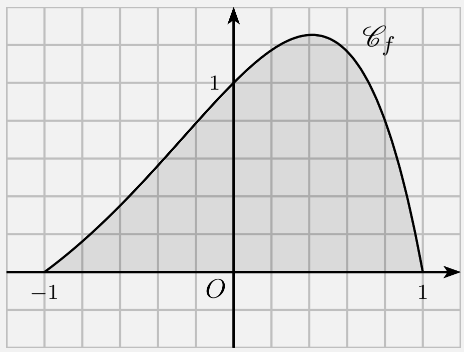


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par :

$$f(x) = (1 - x^2)\mathrm{e}^x$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. (a) Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.

   (b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

2. Le volume $\mathscr{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathscr{V} = 3 \times S$$

   où S est l'aire, en cm^3, de la surface colorée (Figure 2).
   En déduire que ce volume $\mathscr{V}$, arrondi à 0,1 cm^3 près, est égal à 4,4 cm^3

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0{,}01\,;\,+\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2(2 - 3\ln(q)) - 3$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0{,}01\,;\,+\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q)$.
   (b) Montrer que, pour tout $q \geqslant 0{,}01$, $B'(q) = 8q(1 - 6\ln(q))$.
   (c) Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0{,}01\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.
   (d) Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?
2. (a) Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1{,}2\,;\,+\infty[$. Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.
   (b) On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0{,}01\,;\,1{,}2]$. On donne $\alpha \approx 0{,}757$. En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

Correction

Partie A

1. (a) Le polynôme $1 - x^2$ admet pour racines -1 et 1 et il est positif à l'intérieur de l'intervalle des racines. On a donc, pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, $1 - x^2 \geqslant 0$. Et comme $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $x \in [-1\,;\,1]$:

$$\boxed{f(x) \geqslant 0}$$

   (b) Pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = 1 - x^2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u'(x) = -2x \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= \Big[(1 - x^2)\mathrm{e}^x\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -2x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= (1 - 1)\mathrm{e}^1 - (1 - 1)\mathrm{e}^{-1} + \int_{-1}^{1} 2x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x}$$

2. L'aire S est égale à l'intégrale précédente. Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties. Posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= \Big[x\mathrm{e}^x\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^1 + \mathrm{e}^{-1} - \Big[\mathrm{e}^x\Big]_{-1}^{1} \\ &= \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1} - (\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}) \\ &= 2\mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\mathscr{V} = 3 \times S = 3 \times 2 \int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = 12\mathrm{e}^{-1}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{V} \approx 4{,}4 \text{ cm}^3}$$

Partie B

1.(a) On a :

$$\boxed{\lim_{q \to +\infty} B(q) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{q \to +\infty} (8q^2) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{q \to +\infty} (2 - 3\ln(q)) = -\infty \end{cases}$$

(b) La fonction B est dérivable sur $[0{,}01\,;\,+\infty[$ et, pour tout $q \in [0{,}01\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} B'(q) &= 16q(2 - 3\ln(q)) + 8q^2 \times \left(-\frac{3}{q}\right) \\ &= 16q(2 - 3\ln(q)) - 24q \\ &= 8q(4 - 6\ln(q) - 3) \\ &= 8q(1 - 6\ln(q)) \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{B'(q) = 8q(1 - 6\ln(q))}$$

(c) Pour tout $q \in [0{,}01\,;\,+\infty[$, $q > 0$ donc $B'(q)$ est du signe de $1 - 6\ln(q)$. On a :

$$\begin{aligned} 1 - 6\ln(q) \geqslant 0 &\iff 6\ln(q) \leqslant 1 \\ &\iff \ln(q) \leqslant \frac{1}{6} \\ &\iff q \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

On a alors la tableau :

q	$0{,}01$		$\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$		$+\infty$
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$	$B(0{,}01)$	croissante	$B\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}\right)$	décroissante	$-\infty$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} B(0{,}01) &= 0{,}0008(2 - 3\ln(0{,}01)) - 3 \\ &= 0{,}0024\ln(100) - 2{,}9984 \\ &\approx -2{,}9873 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} B\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}\right) &= 8\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}(2 - 3\ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}})) - 3 \\ &= 8\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\left(2 - 3 \times \frac{1}{6}\right) - 3 \\ &= 12\mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - 3 \\ &\approx 13{,}7 \end{aligned}$$

(d) Le bénéfice est maximal pour $q = \mathrm{e}^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}18$ (soit environ 118 bonbons) et ce bénéfice, en dizaine d'euros, est égal à $12\mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - 3 \approx 13{,}7$, soit environ :

$$\boxed{\text{137 euros}}$$

2.(a) On peut remarquer que $1{,}2 > \mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$. Sur l'intervalle $[1{,}2\,;+\infty[$, la fonction B est continue et strictement décroissante. De plus $B(1{,}2) \approx 13{,}7$ et $\lim\limits_{q\to+\infty} B(q) = -\infty$. Or $10 \in]-\infty\,; B(1{,}2)]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1{,}2\,;+\infty[$. Et on a :

- $B(1{,}558) \approx 10{,}007 > 10$
- $B(1{,}559) \approx 9{,}986 < 10$

On en déduit que :

$$\boxed{1{,}558 < \beta < 1{,}559}$$

(b) En utilisant le sens de variation de B et le fait que l'équation $B(q) = 10$ admet pour solutions α et β, on en déduit que l'inéquation $B(q) \geqslant 10$ admet pour ensemble solution l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$. Le bénéfice est donc supérieur à 100 euros lorsqu'il vend :

$$\boxed{\text{Entre 78 et 155 bonbons}}$$

Commentaires

- Dans le tableau de variations d'une fonction f, lorsque la valeur exacte de l'image en un point x_0 est trop « compliquée », il est préférable d'écrire $f(x_0)$ dans le tableau et de donner la valeur exacte (et éventuellement une valeur approchée) à la suite du tableau.

14.3 Un vrai-faux sur les suites

Énoncé **(5 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les cinq questions sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = -0{,}8t_n + 18$.
   Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.
2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :
   $$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4$$
   La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \dfrac{S_n}{n}$.
   Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n}$.
   Affirmation 3 : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^n - n$.
   Affirmation 4 : la suite (u_n) converge.
5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```python
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5*(valeur+2/valeur)
    return valeur
```

   On admet que la suite (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :
   $$\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$$
   Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Correction

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= t_{n+1} - 10 \\
&= -0{,}8t_n + 18 - 10 \\
&= -0{,}8t_n + 8 \\
&= -0{,}8(t_n - 10) \\
&= -0{,}8w_n
\end{aligned}$$

   La suite (w_n) est donc géométrique de raison $-0{,}8$.

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a, en multipliant par $\dfrac{1}{n}$ qui est positif :

$$\frac{3n-4}{n} \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant \frac{3n+4}{n}$$

   Soit :

$$3 - \frac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \frac{4}{n}$$

   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(3 - \frac{4}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3 + \frac{4}{n}\right) = 3$ donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers 3.

3. **Affirmation 3 : Vrai**

   - **Initialisation :**
     Pour $n = 1$, on a d'une part $u_1 = 2$ et d'autre part $\dfrac{1+1}{1} = 2$. La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $v_n = \dfrac{n+1}{n}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 2 - \frac{1}{v_n} \\
&= 2 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= 2 - \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{2n+2-n}{n+1} \\
&= \frac{n+2}{n+1}
\end{aligned}$$

     La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion :**
La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

4. **Affirmation 4 : Faux**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_n = \mathrm{e}^n - n = n\left(\frac{\mathrm{e}^n}{n} - 1\right)$$
Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^n}{n} = +\infty$ donc la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

5. **Affirmation 5 : Vrai**
La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, on en déduit qu'elle est convergente vers une limite l. De plus, cette suite est définie par la relation $u_{n+1} = 0{,}5\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$, c'est-à-dire par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = 0{,}5\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^*$, on sait que l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$\begin{aligned} f(x) = x &\Longleftrightarrow 0{,}5\left(x + \frac{2}{x}\right) = x \\ &\Longleftrightarrow x + \frac{2}{x} = 2x \\ &\Longleftrightarrow x - \frac{2}{x} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{x^2 - 2}{x} = 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2 = 2 \\ &\Longleftrightarrow x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$
Et comme $\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$, la suite (u_n) ne peut pas converger vers $-\sqrt{2}$, elle converge donc vers $\sqrt{2}$.

Commentaires

- Dans le calcul de l'affirmation 1, on aurait également pu remarquer que $t_n = w_n + 10$ et présenter de la façon suivante :
$$\begin{aligned} w_{n+1} &= t_{n+1} - 10 \\ &= -0{,}8t_n + 18 - 10 \\ &= -0{,}8t_n + 8 \\ &= -0{,}8(w_n + 10) + 8 \\ &= -0{,}8w_n - 8 + 8 \\ &= -0{,}8w_n \end{aligned}$$

14.4 Contrôle qualité d'un médicament

Énoncé **(4 points)**

Les deux parties sont indépendantes.

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.
On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. *On arrondira les résultats à 10^{-3} près.*
   (a) Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes.
   (b) Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.
4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».
   Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère ? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i, pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i-ème cachet prélevé.
On considère la variable aléatoire S définie par :

$$S = M_1 + M_2 + \cdots + M_{100}$$

On admet que les variables aléatoires M_1, M_2, ..., M_{100} suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ.

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note s l'écart-type de la variable aléatoire S. Montrer que $s = 10\sigma$.
3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.
   (a) Montrer que cette condition est équivalente à :
   $$P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 0{,}1$$
   (b) En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.

Correction
Partie A

1. On répète 100 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (choisir un cachet non conforme) est égale à 0,02. La variable aléatoire N compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{N \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 100 \text{ et } p = 0{,}02}$$

2. L'espérance de N est donnée par la formule $E(N) = n \times p = 100 \times 0{,}02 = 2$, soit :

$$\boxed{E(N) = 2}$$

Cela signifie qu'en moyenne, il y aura 2 cachets non conformes par boîte.

3. (a) Il s'agit de calculer $P(N = 3)$. On obtient, à l'aide da la calculatrice, que la probabilité qu'une boîte contienne exactement 3 cachets non conformes est :

$$\boxed{P(N = 3) \approx 0{,}182}$$

(b) Contenir au moins 95 cachets conformes revient à contenir au plus 5 cachets non conformes. Il s'agit donc de calculer $P(N \leqslant 5)$. On obtient, à l'aide da la calculatrice, que la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes :

$$\boxed{P(N \leqslant 5) \approx 0{,}985}$$

4. Soit n le nombre de cachets par boîtes et X la variable aléatoire égale au nombre de cachets non conformes dans une boîte. La variable aléatoire suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}02$. La probabilité que la boîte ne contienne que des cachets conformes est $P(X = 0) = 0{,}98^n$. On a alors :

$$\begin{aligned}
P(X = 0) \geqslant 0{,}5 &\iff 0{,}98^n \geqslant 0{,}5 \\
&\iff \ln\left(0{,}98^n\right) \geqslant \ln(0{,}5) \\
&\iff n \ln(0{,}98) \geqslant \ln(0{,}5) \\
&\iff n \leqslant \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)} \quad (\textit{car } \ln(0{,}98) < 0)
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)} \approx 34{,}3$ donc le nombre maximal de cachets par boîte pour qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes avec une probabilité supérieure à 0,5 est :

$$\boxed{n = 34}$$

Partie B

1. La variable aléatoire S étant la somme de 100 variables aléatoires indépendantes suivant la même loi d'espérance $\mu = 2$, on sait que $E(S) = 100 \times 2 = 200$, soit :

$$\boxed{E(S) = 200}$$

Cela signifie, qu'en moyenne, la masse totale des cachets d'une boîte sera égale à 200 grammes.

2. La variable aléatoire S étant la somme de 100 variables aléatoires indépendantes suivant la même loi d'écart-type σ, on sait que son écart-type est $s = \sqrt{100} \times \sigma = 10\sigma$, soit :

$$\boxed{s = 10\sigma}$$

3.(a) On souhaite que $P(199 < S < 201) \geqslant 0{,}9$. Or :

$$\begin{aligned} P(199 < S < 201) \geqslant 0{,}9 &\Longleftrightarrow P(|S - 200| < 1) \geqslant 0{,}9 \\ &\Longleftrightarrow P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 0{,}1 \quad \textit{(passage à l'événement contraire)} \end{aligned}$$

Cette condition est donc bien équivalente à :

$$\boxed{P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 0{,}1}$$

(b) On sait que $E(S) = 200$ et $V(S) = 100\sigma^2$, on a alors, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\delta > 0$:

$$P(|S - E(S)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(S)}{\delta^2}$$

Soit, en prenant $\delta = 1$:

$$P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 100\sigma^2$$

Afin d'assurer la condition, il suffit que $100\sigma^2 \leqslant 0{,}1$ d'où $\sigma^2 \leqslant \dfrac{0{,}1}{100} = 0{,}001$ et donc $\sigma = \sqrt{0{,}001}$. La valeur maximale de σ est donc :

$$\boxed{\sigma = \sqrt{0{,}001} \approx 0{,}0316}$$

Commentaires

- Dans la question 3a, plutôt que d'utiliser directement la calculatrice, on aurait pu appliquer la formule :
$$P(X = 3) = \binom{100}{3} \times 0{,}02^3 \times 0{,}98^{97} \approx 0{,}182$$
- Dans la question 4, plutôt que d'utiliser la fonction ln pour résoudre l'inéquation, on pouvait procéder par balayage et remarquer que $0{,}98^{34} \approx 0{,}503 > 0{,}5$ et $0{,}98^{35} \approx 0{,}493 < 0{,}5$.

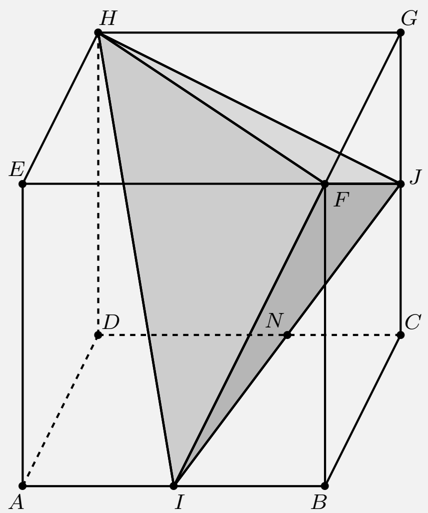
SUJET 15

MÉTROPOLE - 12 SEPTEMBRE 2024 (REMPLACEMENT)

15.1 Un tétraèdre dans un cube

Énoncé **(5 points)**

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CG]$.
Le point N est le milieu du segment $[IJ]$.
L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre $HFIJ$.
On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$.



1. (a) Donner les coordonnées des points I et J. En déduire les coordonnées de N.
   (b) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ ont pour coordonnées respectives :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\0{,}5\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}0{,}25\\-0{,}5\\0{,}75\end{pmatrix}$$

   (c) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ sont orthogonaux.

On admet que $NF = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

(d) En déduire que l'aire du triangle FIJ est égale à $\dfrac{\sqrt{21}}{8}$.

2. On considère le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

(a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est normal au plan (FIJ).

(b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est : $4x - y - 2z - 2 = 0$.

(c) On note d la droite orthogonale au plan (FIJ) passant par le point H. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

(d) Montrer que la distance du point H au plan (FIJ) est égale à $\dfrac{5\sqrt{21}}{21}$.

(e) On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.
Calculer le volume du tétraèdre $HFIJ$. On donnera la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

Correction

1.(a) On a :

$$\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{J\left(1\,;1\,;\frac{1}{2}\right)}$$

Et comme N est le milieu de $[IJ]$, on a $N\left(\dfrac{\frac{1}{2}+1}{2}\,;\dfrac{0+1}{2}\,;\dfrac{0+\frac{1}{2}}{2}\right)$, soit :

$$\boxed{N\left(\frac{3}{4}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{4}\right)}$$

(b) On a alors :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1-0{,}5\\1-0\\0{,}5-0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}1-0{,}75\\0-0{,}5\\1-0{,}25\end{pmatrix}$$

Soit :

$$\boxed{\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\0{,}5\end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}0{,}25\\-0{,}5\\0{,}75\end{pmatrix}}$$

(c) On a :

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{NF} = 0{,}5 \times 0{,}25 + 1 \times (-0{,}5) + 0{,}5 \times 0{,}75 = 0{,}125 - 0{,}5 + 0{,}375 = 0$$

Leur produit scalaire est nul donc :

$$\boxed{\text{Les vecteurs } \overrightarrow{IJ} \text{ et } \overrightarrow{NF} \text{ sont orthogonaux}}$$

(d) Les droites (IJ) et (NF) étant perpendiculaires, NF est la hauteur issue de F dans le triangle FIJ. L'aire du triangle FIJ est donc :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{IJ \times NF}{2}$$

Or $IJ = \sqrt{0{,}5^2 + 1^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{1{,}5} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ d'où :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{\sqrt{14}}{4}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{8}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{\sqrt{21}}{8}}$$

2. (a) On a :
   - $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FI} = 4 \times (-0{,}5) - 1 \times 0 - 2 \times (-1) = -2 + 2 = 0$
   - $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FJ} = 4 \times 0 - 1 \times 1 - 2 \times (-0{,}5) = -1 + 1 = 0$

   Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FIJ), on en déduit que :

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{u} \text{ est normal au plan } (FIJ)}$$

(b) D'après la question précédente, le plan (FIJ) admet une équation cartésienne de la forme :

$$4x - y - 2z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $F(1\,;\,0\,;\,1)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $4 \times 1 - 0 - 2 \times 1 + d = 0$, soit $d = -2$. Une équation cartésienne du plan (FIJ) est donc :

$$\boxed{4x - y - 2z - 2 = 0}$$

(c) La droite d passe par le point $H(0\,;\,1\,;\,1)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}}$$

(d) Déterminons les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point H sur le plan (FIJ). Il s'agit du point d'intersection de la droite d et du plan (FIJ). On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de la droite d dans l'équation cartésienne du plan (FIJ) :

$$\begin{aligned} 4 \times 4t - (1-t) - 2(1-2t) - 2 = 0 &\iff 16t - 1 + t - 2 + 4t - 2 = 0 \\ &\iff 21t = 5 \\ &\iff t = \frac{5}{21} \end{aligned}$$

Le point K est donc le point de paramètre $t = \dfrac{5}{21}$ dans la représentation paramétrique de d, soit le point de coordonnées :

$$\left(\frac{20}{21}\,;\,\frac{16}{21}\,;\,\frac{11}{21}\right)$$

On a alors :

$$HK = \sqrt{\left(0-\frac{20}{21}\right)^2+\left(1-\frac{16}{21}\right)^2+\left(1-\frac{11}{21}\right)^2} = \sqrt{\frac{400+25+100}{21^2}} = \sqrt{\frac{525}{21^2}} = \frac{5\sqrt{21}}{21}$$

Et comme la distance du point H au plan (FIJ) est la distance entre le point H et son projeté orthogonal sur le plan (FIJ), cette distance est :

$$\boxed{HK = \frac{5\sqrt{21}}{21}}$$

(e) En choisissant pour base le triangle FIJ, la hauteur correspondante est la longueur HK. Le volume du tétraèdre $HFIJ$ est alors :

$$\mathscr{V}_{HFIJ} = \frac{1}{3}\times\mathscr{A}_{FIJ}\times HK = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{21}}{8}\times\frac{5\sqrt{21}}{21} = \frac{5}{24}$$

Le volume du tétraèdre $HFIJ$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{V}_{HFIJ} = \frac{5}{24}}$$

Commentaires

- Dans la question 2a, on aurait pu utiliser deux autres vecteurs non colinéaires du plan (IJF) comme par exemple $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$.

15.2 Marche aléatoire d'un robot

Énoncé **(5 points)**

La partie C est indépendante des parties A et B.

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.

Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égale à $\dfrac{1}{3}$.

S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite lors du déplacement suivant est égale à $\dfrac{3}{4}$.

S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche lors du déplacement suivant est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

- D_n l'événement : « le robot se déplace à droite lors du n-ième déplacement » ;

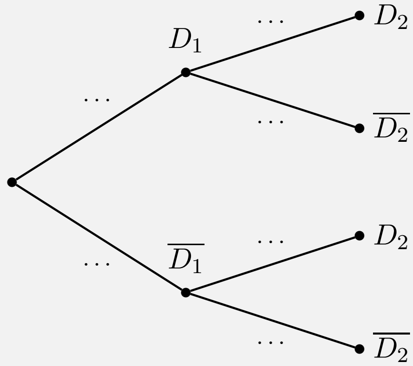
- $\overline{D_n}$ l'événement contraire de D_n ;
- p_n la probabilité de l'événement D_n.

On a donc $p_1 = \dfrac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.
3. Montrer que $p_2 = \dfrac{7}{12}$.
4. Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement. Quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement ?

Partie B : étude de la suite (p_n)

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

   On pourra s'aider d'un arbre.

2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

   (b) La suite (p_n) est-elle convergente ? Justifier.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

   (b) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

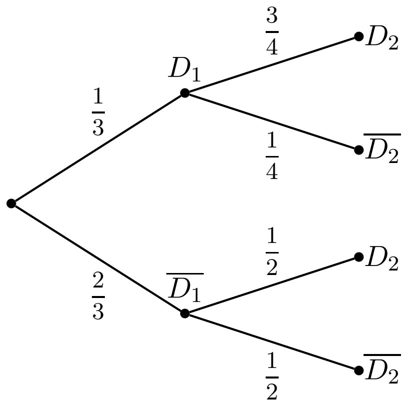
Partie C

Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\dfrac{3}{4}$.

Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

Correction
Partie A

1. On complète l'arbre de la façon suivante :



2. Il s'agit de calculer $P(D_1 \cap D_2)$:

$$\begin{aligned} P(D_1 \cap D_2) &= P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

La probabilité que le robot se déplace deux fois à droite est donc :

$$\boxed{P(D_1 \cap D_2) = \frac{1}{4}}$$

3. Les événements D_1 et $\overline{D_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D_2) &= P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) + P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{p_2 = \frac{7}{12}}$$

4. Il s'agit de calculer $P_{\overline{D_2}}(D_1)$:

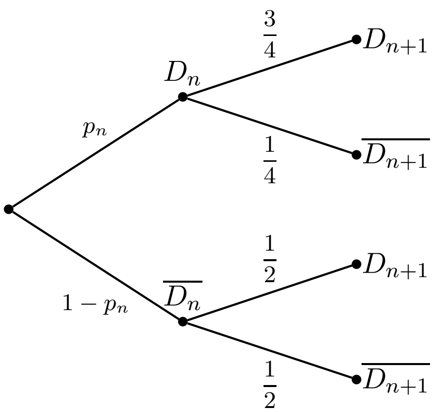
$$\begin{aligned}
P_{\overline{D_2}}(D_1) &= \frac{P(D_1 \cap \overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\
&= \frac{P(D_1) \times P_{D_1}(\overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\
&= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} \\
&= \frac{1}{12} \times \frac{12}{5} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

La probabilité que le robot se soit déplacé à droite lors du premier déplacement sachant qu'il s'est déplacé à gauche lors du deuxième est donc :

$$\boxed{P_{\overline{D_2}}(D_1) = \frac{1}{5}}$$

Partie B

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Les événements D_n et $\overline{D_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(D_{n+1}) &= P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) \\
&= p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n \\
&= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}}$$

2.(a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.
On a alors, en multipliant par $\dfrac{1}{4}$ qui est positif :
$$\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$$
Puis en ajoutant $\dfrac{1}{2}$:
$$\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$
Soit :
$$p_{n+1} \leqslant p_{n+2} < \frac{2}{3}$$
La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc, pour tout $n \geqslant 1$:
$$\boxed{p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}}$$

(b) La suite (p_n) est :

- croissante (car $p_n \leqslant p_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)
- majorée (car $p_n < \dfrac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

On en déduit que :
$$\boxed{\text{La suite } (p_n) \text{ est convergente}}$$

3.(a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :
$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{4}u_n
\end{aligned}$$

Et comme $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{4} \text{ et de premier terme } u_0 = -\frac{1}{3}}$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, soit :

$$u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Et comme $u_n = p_n - \frac{2}{3}$, on a $p_n = u_n + \frac{2}{3}$, soit :

$$p_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

Or $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{3}}$$

Cela signifie, qu'à long terme, la probabilité que le robot se déplace à droite, pour un déplacement donné, sera proche de $\frac{2}{3}$.

Partie C

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de déplacements vers la droite sur les 10 déplacements. Comme on répète 10 fois une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (le robot se déplace vers la droite) est égale à $\frac{3}{4}$, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$. De plus, le robot revient à son point de départ si et seulement si il effectue exactement 5 déplacements vers la droite. On obtient alors, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité que le robot revienne à son point de départ au bout des dix déplacements est :

$$\boxed{P(X = 5) \approx 0{,}058}$$

Commentaires

- Dans la question 3a, pour montrer que la suite (u_n) est géométrique, on aurait également pu utiliser la relation $u_n = p_n - \frac{2}{3}$ d'où $p_n = u_n + \frac{2}{3}$ et on aurait présenter le calcul de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{4}u_n \end{aligned}$$

- Dans la question 3b, pour déterminer la limite de la suite (p_n), comme on avait déjà montré que la suite était convergente, on pouvait utiliser le fait que la limite l était un point fixe, c'est-à-dire une solution de l'équation $x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$. Il suffit alors de résoudre cette équation :

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} &\iff \frac{3}{4}x = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \\ &\iff x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

  On retrouve bien que la suite (p_n) converge vers $\frac{2}{3}$.

- Dans la partie C, on pouvait utiliser la formule :

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

15.3 Une fonction logistique

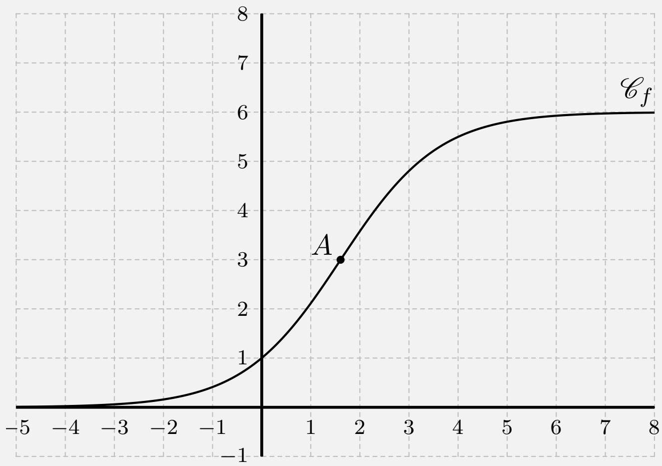
Énoncé **(5 points)**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}$$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.



1. Montrer que le points A de coordonnées $(\ln(5)\,;\,3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
3. (a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x, on a :
$$f'(x) = \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}$$
   (b) En déduire le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que :
   - f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f'' sa dérivée seconde ;
   - pour tout réel x :
$$f''(x) = \frac{30\mathrm{e}^{-x}(5\mathrm{e}^{-x}-1)}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^3}$$
   (a) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion.
   (b) Justifier que pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;\,\ln(5)]$, on a : $f(x) \geqslant \dfrac{5}{6}x+1$.
5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k\ln(\mathrm{e}^x+5)$, où k est une constante réelle.

(a) Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln(5)$ est égale à $6\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$.

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad : \quad y' = y - \frac{1}{6}y^2$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}u(x)^2$$

1. Montrer que la fonction f définie dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$.
3. On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$. On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h.

(a) Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle $y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

(b) Pour tout réel positif m, on considère la fonction g_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6m\mathrm{e}^{-x}}$$

Montrer que pour tout réel positif m, la fonction g_m est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

Correction

Partie A

1. On a :

$$f(\ln(5)) = \frac{6}{1 + 5\mathrm{e}^{-\ln(5)}} = \frac{6}{1 + 5 \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(5)}}} = \frac{6}{1 + \frac{5}{5}} = \frac{6}{1+1} = \frac{6}{2} = 3$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point } A(\ln(5)\,;\,3) \text{ appartient à la courbe } \mathscr{C}_f}$$

2. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 6} \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3.(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{6 \times (-5\mathrm{e}^{-x})}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} \\ &= \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0} \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$$

On a donc le tableau :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	6

4.(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $(1+5\mathrm{e}^{-x})^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $5\mathrm{e}^{-x} - 1$. Or :

$$\begin{aligned} 5\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0 &\iff 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{1}{5} \\ &\iff -x \geqslant \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\iff x \leqslant -\ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\iff x \leqslant \ln(5) \end{aligned}$$

On en déduit le tableau :

x	$-\infty$		$\ln(5)$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f		convexe		concave	

En $\ln(5)$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe donc :

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C}_f \text{ admet } A \text{ pour point d'inflexion}}$$

(b) Déterminons une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. On a $f(0) = \dfrac{6}{1+5} = 1$ et $f'(0) = \dfrac{30}{6^2} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = \dfrac{5}{6}(x-0)+1$, soit :

$$y = \frac{5}{6}x + 1$$

Et comme la fonction f est convexe sur $]-\infty\,;\ln(5)]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangente sur cet intervalle. En particulier, elle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0 d'où, pour tout $x \in\,]-\infty\,;\ln(5)]$:

$$\boxed{f(x) \geqslant \frac{5}{6}x + 1}$$

5.(a) La fonction F_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_k'(x) = \frac{k\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+5} = \frac{k}{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x+5)} = \frac{k}{1+5\mathrm{e}^{-x})}$$

On en déduit que F_k est une primitive de f si et seulement si :

$$\boxed{k = 6}$$

(b) Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[6\ln\left(\mathrm{e}^x+5\right)\Big]_0^{\ln(5)} \\
&= 6\ln\left(\mathrm{e}^{\ln(5)}+5\right) - 6\ln\left(\mathrm{e}^0+5\right) \\
&= 6\ln(5+5) - 6\ln(1+5) \\
&= 6\left(\ln(10)-\ln(6)\right) \\
&= 6\ln\left(\frac{10}{6}\right) \\
&= 6\ln\left(\frac{5}{3}\right)
\end{aligned}$$

L'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln(5)$ est donc :

$$\boxed{\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x = 6\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$$

Partie B

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{1}{6}\left(f(x)\right)^2 &= \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}\right)^2 \\
&= \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{6^2}{6\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{6(1+5\mathrm{e}^{-x})}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} - \frac{6}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{6+30\mathrm{e}^{-x}-6}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2} \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) - \dfrac{1}{6}\left(f(x)\right)^2$. On a montré que :

$$\boxed{f \text{ est solution de l'équation différentielle } (E)}$$

2. Résolvons l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$.
   - L'équation homogène associée $y' = -y$ admet pour solutions les fonctions de la forme :
   $$x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$
   - L'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$ admet pour solution particulière constante la fonction :
   $$x \mapsto \frac{1}{6}$$
   - Les solutions de l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$ sont donc les fonctions de la forme :
   $$\boxed{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{6} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

3.(a) Supposons que h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$$
Or, on a $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ donc $h'(x) = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$ d'où :
$$-\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{6}$$
D'où, en multipliant par $g(x)^2$:
$$-g'(x) = -g(x) + \frac{1}{6}g(x)^2$$

Soit :

$$g'(x) = g(x) - \frac{1}{6}g(x)^2$$

Et donc :

$$\boxed{g \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = y - \frac{1}{6}y^2}$$

(b) La fonction g_m est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc elle ne s'annule pas. Posons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)} = \frac{1 + 6me^{-x}}{6} = me^{-x} + \frac{1}{6}$$

D'après la question 2, la fonction h_m est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$ donc, d'après la question 3a :

$$\boxed{\text{La fonction } g_m \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = y - \frac{1}{6}y^2}$$

Commentaires

- Pour la dernière question, on aurait pu montrer que g_m était solution de l'équation différentielle de manière « brutale » mais, étant donné la configuration de l'énoncé, il était attendu (également plus rapide et plus élégant) d'utiliser les questions précédentes.

15.4 Encore un vrai-faux en vrac

Énoncé **(5 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère le script écrit en langage Python ci-dessous.

```
def seuil(S) :
        n = 0
        u = 7
        while u < S :
            n = n + 1
            u = 1.05*u + 3
        return(n)
```

Affirmation 1 : l'instruction `seuil(100)` renvoie la valeur 18.

2. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} \cdots + \frac{1}{5^n}$.

Affirmation 2 : la suite (S_n) converge vers $\frac{5}{4}$.

3. **Affirmation 3 :** dans une classe composée de 30 élèves, on peut former 870 binômes de délégués différents.

4. On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\,(\ln(x))^2$.
   Affirmation 4 : l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
5. **Affirmation 5 :**
$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$$

Correction

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 3$. La fonction `seuil(S)` renvoie la valeur du plus petit entier n tel que $u_n \geqslant S$. Or, on obtient à l'aide de la calculatrice :
   - $u_{17} \approx 93{,}6 < 100$
   - $u_{18} \approx 101{,}2 > 100$

   Le plus petit entier tel que $u_n \geqslant 100$ est donc 18.
2. **Affirmation 2 : Vrai**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{5}$. On a donc :
$$S_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$
   Or $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{5}{4}$.
3. **Affirmation 3 : Faux**
   Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 30 :
$$\binom{30}{2} = \frac{30!}{2!\times(30-2)!} = \frac{30!}{2!\times 28!} = \frac{29\times 30}{2} = 435$$
   On peut donc former 435 binômes de délégués différents.
4. **Affirmation 4 : Vrai**
   La fonction f est dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\times(\ln(x))^2 + x\times 2\times\frac{1}{x}\times\ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \\ &= \ln(x)\,(\ln(x)+2) \end{aligned}$$
   Sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$. De plus, sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$. On en déduit que, sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, f est continue et strictement croissante. De plus $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Or $1 \in [0\,;\,+\infty[$ donc, d'après la théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[1\,;\,+\infty[$.

5. **Affirmation 5 : Vrai**
Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 \\ &= 1 - 2\mathrm{e}^{-1} \\ &= 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \\ &= \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

Commentaires

- Pour la question 2, on rappelle la formule donnant la somme S des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q :

$$\boxed{S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}}$$

SUJET 16

AMÉRIQUE DU SUD - 20 NOVEMBRE 2024

16.1 Dichotomie pour encadrer une solution

Énoncé **(5 points)**

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + \dfrac{1}{4}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + \dfrac{1}{4}y = 0$, d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (20x + 8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. De plus, on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. (a) Justifier que, pour tout réel x positif, $f'(x) = (18 - 5x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.
   (a) Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[14\,;\,15]$.

(b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` ci-contre, écrite en langage Python.

a	14				
b	15				
$b-a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	FAUX				

```python
from math import exp
def f(x) :
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation() :
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8 :
            a = m
        else :
            b = m
    return a,b
```

(c) Quel est l'objectif de la fonction `solution_equation` dans le contexte de la question ?

Correction

Partie A

1. La fonction g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= a\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + ax \times \left(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}\right) \\ &= a\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{4}ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \\ &= \left(a - \frac{1}{4}ax\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \end{aligned}$$

Et donc :

$$g'(x) + \frac{1}{4}g(x) = \left(a - \frac{1}{4}ax\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + \frac{1}{4}ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = a\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$$

La condition pour que g soit solution de (E) est donc :

$$\boxed{a = 20}$$

2. Les solutions de l'équation différentielle (E') sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

3. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto 20x\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} + \lambda\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Soit :

$$\boxed{x \mapsto (20x + \lambda)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

4. Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, posons $f(x) = (20x + \lambda)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(0) = 8 &\iff (20 \times 0 + \lambda)\mathrm{e}^0 = 8 \\ &\iff \lambda = 8 \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$:

$$\boxed{f(x) = (20x + 8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}}$$

Partie B

1.(a) On a vu que la fonction f était solution de l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{4}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, on a donc, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{4}f(x) + 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = (-5x - 2 + 20)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} = (18 - 5x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = (18 - 5x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}}$$

(b) Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $18 - 5x$ d'où le tableau :

$$\begin{array}{|c|ccccc|} \hline x & 0 & & \frac{18}{5} & & +\infty \\ \hline f'(x) & & + & 0 & - & \\ \hline & & & f\left(\frac{18}{5}\right) & & \\ f(x) & & \nearrow & & \searrow & \\ & 8 & & & & 0 \\ \hline \end{array}$$

Avec $f\left(\dfrac{18}{5}\right) = \left(20 \times \dfrac{18}{5} + 8\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4} \times \frac{18}{5}} = 80\mathrm{e}^{-0,9}$. Le maximum de f est donc atteint en $\dfrac{18}{5}$ et vaut :

$$\boxed{f\left(\frac{18}{5}\right) = 80\mathrm{e}^{-0,9}}$$

2.(a) Sur l'intervalle $[14\,;\,15]$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus $f(14) \approx 8{,}7 > 8$ et $f(15) \approx 7{,}2 < 8$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[14\,;\,15]$.

(b) On obtient :

a	14	14	14,25	14,375	14,4375
b	15	14,5	14,5	14,5	14,5
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	14,5	14,25	14,375	14,4375	
Condition $f(m) > 8$	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	

(c) La fonction `solution_equation` donne un encadrement d'amplitude inférieur à 0,1 de α. Ainsi on a :

$$\boxed{14{,}4375 < \alpha < 14{,}5}$$

Commentaires

- L'algorithme utilisé dans la question 2b est un algorithme de dichotomie qui consiste à partager l'intervalle contenant la solution en deux intervalles, à ne garder que celui qui contient la solution puis à recommencer. C'est ce que l'on fait assez naturellement quand on nous dit « Devine à quel nombre je pense entre 0 et 1 000 et je te dis plus ou moins »...

16.2 Des boules et des urnes

Énoncé **(6 points)**

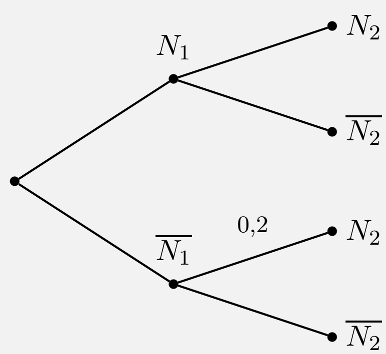
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.
L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.
On considère l'expérience aléatoire suivante : on pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2, puis on pioche au hasard une boule dans U_2.
On note :

1. N_1 l'événement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
2. N_2 l'événement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ son événement contraire.

Partie A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.
   (a) Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1, est 0,2.
   (b) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des événements concernés, sous forme décimale.



2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2.
3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.
4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2. Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1. On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2}.

Partie B

n désigne un entier naturel non nul.

L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.

On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X. Justifier votre réponse.
2. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que : $1 - 0{,}72^n \geqslant 0{,}9$.
3. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

Partie C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2.

On considère la nouvelle expérience suivante : on pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?
3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse. *On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.*

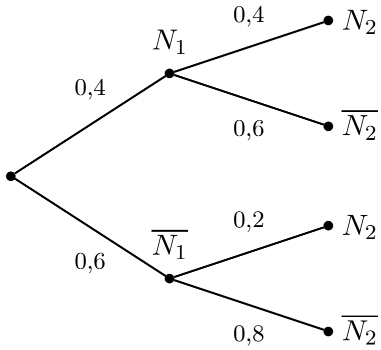
Correction

Partie A

1.(a) Après avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1, on place cette boule dans l'urne U_2. Il y a alors 1 boule noire et 4 boules blanches dans l'urne U_2. La probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 est donc égale à $\dfrac{1}{5} = 0{,}2$. Ainsi la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est :

$$\boxed{P_{\overline{N_1}}(N_2) = 0{,}2}$$

(b) On obtient les autres probabilités à l'aide d'un raisonnement similaire et on obtient l'arbre :



2. Il s'agit de calculer $P(N_1 \cap N_2)$:

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 est donc :

$$\boxed{P(N_1 \cap N_2) = 0{,}16}$$

3. Les événements N_1 et N_2 forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(N_2) &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) + P(\overline{N_1}) \times P_{\overline{N_1}}(N_2) \\ &= 0{,}4 \times 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}16 + 0{,}12 \\ &= 0{,}28 \end{aligned}$$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est donc :

$$\boxed{P(N_2) = 0{,}28}$$

4. Il s'agit de calculer $P_{N_2}(\overline{N_1})$:

$$\begin{aligned} P_{N_2}(\overline{N_1}) &= \frac{P(\overline{N_1} \cap N_2)}{P(N_2)} \\ &= \frac{0{,}12}{0{,}28} \\ &\approx 0{,}43 \end{aligned}$$

La probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 sachant qu'on a pioché une boule noire dans l'urne U_2 est donc :

$$\boxed{P_{N_2}(\overline{N_1}) \approx 0{,}43}$$

Partie B

1. On répète n fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (piocher une boule noire) est $p = 0{,}28$. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p = 0{,}28}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} 1 - 0{,}72^n \geqslant 0{,}9 &\iff 0{,}72^n \leqslant 0{,}1 \\ &\iff \ln\left(0{,}72^n\right) \leqslant \ln(0{,}1) \\ &\iff n\ln(0{,}72) \leqslant \ln(0{,}1) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}72)} \quad \textit{(car } \ln(0{,}72) < 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}72)} \approx 7{,}01$ donc le plus petit entier naturel n tel que $1 - 0{,}72^n \geqslant 0{,}9$ est :

$$\boxed{n = 8}$$

3. L'expression $1 - 0{,}72^n$ correspond à la probabilité d'obtenir au moins une boule noire piochée dans l'urne U_2. En effet cette probabilité est :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}72^n$$

Ainsi, à partir de $n = 8$, on est sûr à au moins 90 % d'avoir obtenu au moins une boule noire.

Partie C

1. Il s'agit de déterminer le nombre de choix possibles de 2 boules parmi 10, le nombre de tirages possibles de 2 boules simultanément dans l'urne U_1 est donc :

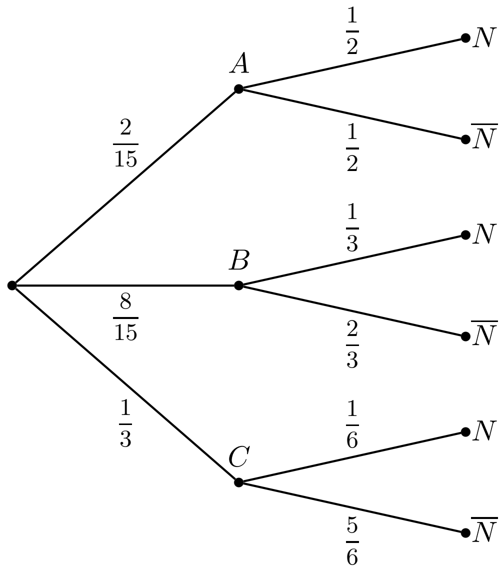
$$\boxed{\binom{10}{2} = 45}$$

2. Le nombre de possibilités pour le choix de la boule blanche et $\dbinom{6}{1} = 6$ et le nombre de possibilités pour le choix de la boule noire et $\dbinom{4}{1} = 4$. Le nombre de tirages possibles de 2 boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire est donc :

$$\boxed{\binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 24}$$

3. Il y a trois possibilités pour le tirage des deux boules dans l'urne U_1. Considérons les événements :
   - A : « Piocher deux boules noires dans l'urne U_1 »
   - B : « Piocher une boule noire et une boule blanche dans l'urne U_1 »
   - C : « Piocher deux boules blanches dans l'urne U_1 »
   - N : « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 »

   Le nombre de tirage avec 2 boules noires est $\dbinom{4}{2} = 6$ donc $P(A) = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$. Le nombre de tirage avec une boule noire et une boule blanche est 24 donc $P(B) = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$. Le nombre de tirage avec 2 boules blanches est $\dbinom{6}{2} = 15$ donc $P(C) = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$. On peut alors représenter la situation par l'arbre :



Les événements A, B et C forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(N) &= P(A) \times P_A(N) + P(B) \times P_B(N) + P(C) \times P_C(N) \\ &= \frac{2}{15} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \\ &= 0{,}3 \end{aligned}$$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est donc :

$$\boxed{P(N) = 0{,}3}$$

Elle est donc supérieure à celle obtenue avec l'expérience de la partie A (qui était égale à 0,28).

Commentaires

- Dans la question 2, on obtient $n \geqslant 7{,}01$. On est alors très tenté de dire $n \geqslant 7$ car on est très proche de 7... Mais non ! L'entier n doit être plus grand que 7,01 donc il n'y a pas le choix, il faut attendre $n = 8$ (c'est rageant mais c'est comme ça).
- Dans la partie C, lorsque l'on parle du nombre de tirages possibles, il faut envisager chaque boule dans son individualité et ne pas la réduire à sa couleur. On fait comme si les boules étaient numérotées de 1 à 10.

16.3 Un vrai-faux sur les suites

Énoncé **(4 points)**

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes et justifier votre réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans la notation. Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{25 + (-1)^n}{n}$.

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \dfrac{w_n}{1+w_n} \end{cases}$.

   On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$.
   On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.
   Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \ln(1+v_n) \end{cases}$.

   On admet que pour tout entier naturel n, $v_n > 0$.
   Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n \,\mathrm{d}x$.

   Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.

Correction

1. **Affirmation 1 : Faux**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$$
   Donc :
$$24 \leqslant 25 + (-1)^n \leqslant 26$$
   Puis :
$$\frac{24}{n} \leqslant \frac{25+(-1)^n}{n} \leqslant \frac{26}{n}$$
   Soit :
$$\frac{24}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{26}{n}$$
   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{24}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{26}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers 0.

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= \frac{k}{w_{n+1}} - \frac{k}{w_n} \\ &= \frac{k(1+w_n)}{w_n} - \frac{k}{w_n} \\ &= \frac{k + kw_n - k}{w_n} \\ &= \frac{kw_n}{w_n} \\ &= k \end{aligned}$$

Cela prouve que la suite (t_n) est arithmétique de raison k. Et comme k est strictement positif, elle est strictement croissante.

3. **Affirmation 3 : Vrai**

   Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant v_n$.

   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $v_0 = 1$ et $v_1 = \ln(2) \approx 0{,}69$ donc $v_1 \leqslant v_0$ et la propriété est vraie.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :
     $$v_{n+1} \leqslant v_n$$
     On a alors :
     $$1 + v_{n+1} \leqslant 1 + v_n$$
     Puis, en appliquant la fonction ln qui est croissante sur $]0\,;+\infty[$:
     $$\ln(1 + v_{n+1}) \leqslant \ln(1 + v_n)$$
     Soit :
     $$v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$$
     La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
   - **Conclusion :**
     La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant v_n$. Cela prouve que la suite (v_n) est décroissante.

4. **Affirmation 4 : Vrai**

   On a :
   $$I_{n+1} = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^{n+1}\,\mathrm{d}x$$
   Pour tout $x \in [1\,;\mathrm{e}]$, on pose :
   $$\begin{cases} u(x) = (\ln(x))^{n+1} \\ v'(x) = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u'(x) = (n+1) \times \dfrac{1}{x} \times (\ln(x))^n \\ v(x) = x \end{cases}$$
   On a, par intégration par parties :
   $$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^{n+1}\,\mathrm{d}x &= \Big[x\,(\ln(x))^{n+1}\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{n+1}{x} \times (\ln(x))^n \times x\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}\,(\ln(\mathrm{e}))^{n+1} - (\ln(1))^{n+1} - \int_1^{\mathrm{e}} (n+1)\,(\ln(x))^n\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - (n+1)I_n \end{aligned}$$
   On a donc bien :
   $$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$$

Commentaires

- Pour l'affirmation 3, le recours à une récurrence me paraît inévitable. Les méthodes classiques consistant à calculer $v_{n+1} - v_n$ ou $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ ne semblent pas aboutir ici.

16.4 Distance entre deux droites

Énoncé **(5 points)**

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires..
Par définition, la distance entre deux droite non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment $[EF]$, où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et à (d_2).
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$.

Soit (d_1), la droite passant par $A(1\,;\,2\,;\,-1)$ de vecteur directeur $\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1).
2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u_1}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x + y + 5z + 5 = 0$.

4.(a) Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

  (b) On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$. Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0\,;\,-\dfrac{5}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{4}{3}\,;\,-1\right)$.

5.(a) Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

  (b) Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

Correction

1. La droite (d_1) passe par $A(1\,;\,2\,;\,-1)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + 2t' \qquad \text{avec } t' \in \mathbb{R} \\ z = -1 \end{cases}}$$

2. La droite (d_1) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et la droite (d_2) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Leurs vecteurs directeurs n'étant pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.
Étudions leur intersection :

$$\begin{cases} 1 + t' = 0 \\ 2 + 2t' = 1 + t \\ -1 = 2 + t \end{cases} \iff \begin{cases} t' = -1 \\ 0 = -2 \\ t = -3 \end{cases}$$

Ce système étant impossible, il n'admet aucune solution. Les droites (d_1) et (d_2) ne sont donc pas sécantes.
On a montré qu'elles ne sont ni sécantes ni parallèles donc :

$$\boxed{\text{Les droites } (d_1) \text{ et } (d_2) \text{ ne sont pas coplanaires}}$$

3. Considérons le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$. On a :
   - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u_1} = -2 \times 1 + 1 \times 2 + 5 \times 0 = -2 + 2 = 0$
   - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{w} = -2 \times 2 + 1 \times (-1) + 5 \times 1 = -4 - 1 + 5 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$, il est normal à ce plan. Le plan $\mathscr{P}$ admet donc une équation de la forme $-2x + y + 5z + d = 0$. Et comme le point A appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation, soit $-2 + 2 - 5 + d = 0$ et donc $d = 5$. Le plan $\mathscr{P}$ admet donc pour équation cartésienne :

$$-2x + y + 5z + 5 = 0$$

4.(a) La droite (d_2) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$. Or :

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u_2} = -2 \times 0 + 1 \times 1 + 5 \times 1 = 6 \neq 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ n'étant pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}$, la droite (d_2) n'est pas parallèle au plan $\mathscr{P}$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La droite } (d_2) \text{ et le plan } \mathscr{P} \text{ sont sécants}}$$

(b) On vérifie que :

- Le point F appartient à la droite (d_2). En effet il s'agit du point de paramètre $t = -\dfrac{8}{3}$ dans la représentation paramétrique de l'énoncé.
- Le point F appartient au plan $\mathscr{P}$.
  En effet $-2 \times 0 + \left(-\dfrac{5}{3}\right) + 5 \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) + 5 = -\dfrac{5}{3} - \dfrac{10}{3} + 5 = 0$.

Le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$ est donc bien le point :

$$\boxed{F\left(0\,;\,-\frac{5}{3}\,;\,-\frac{2}{3}\right)}$$

5.(a) Il s'agit de montrer que la droite (EF) est orthogonal à (d_1) et à (d_2). On a $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

et donc :

- $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{u_1} = -\dfrac{2}{3} \times 1 + \dfrac{1}{3} \times 2 - \dfrac{1}{3} \times 0 = 0$
- $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{u_2} = -\dfrac{2}{3} \times 0 + \dfrac{1}{3} \times 1 - \dfrac{1}{3} \times 1 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et à $\overrightarrow{u_2}$ donc la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et à (d_2), on en déduit que :

$$\boxed{\text{La distance } EF \text{ est la distance entre les droites } (d_1) \text{ et } (d_2)}$$

(b) On a :

$$EF = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

La distance entre les droites (d_1) et (d_2) est donc :

$$\boxed{EF = \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

Commentaires

- Dans la question 3, une équation du plan étant donnée dans l'énoncé, on aurait pu rédiger différemment en vérifiant que cette équation est bien celle d'un plan qui passe par le point A et donc un vecteur normal est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}$.

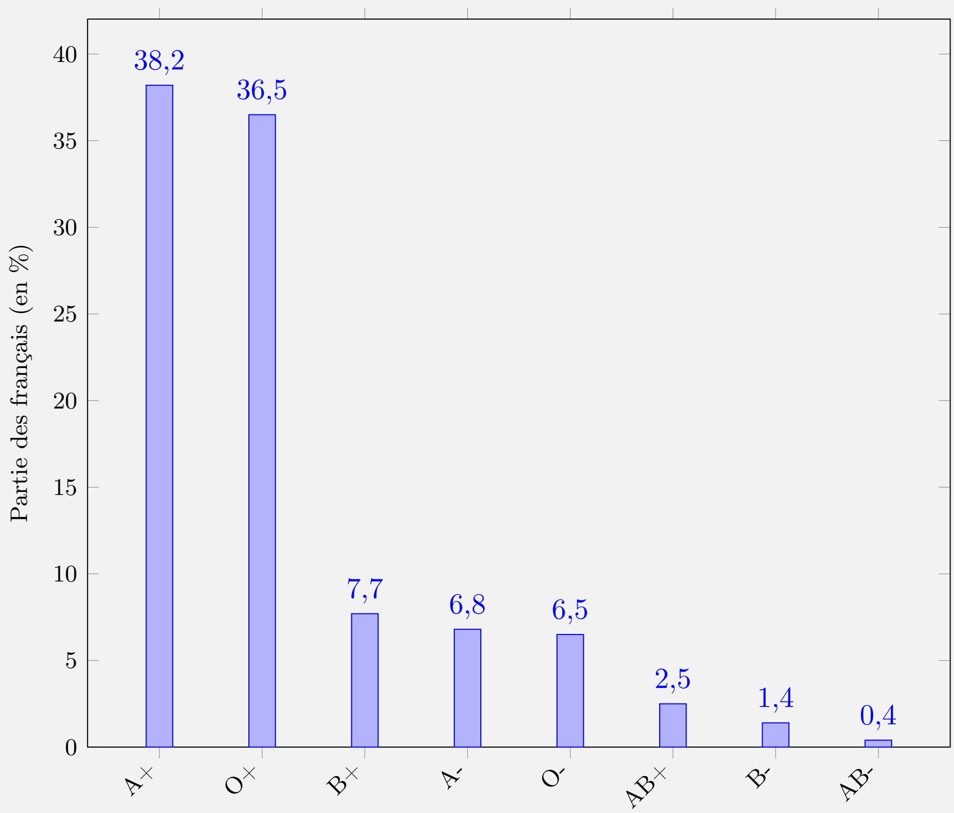
SUJET 17

AMÉRIQUE DU SUD - 21 NOVEMBRE 2024

17.1 Répartition des groupes sanguins

Énoncé **(5 points)**

Voici la répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :



Source : https ://statista.com/statistiques/656036/groupes-sanguins-repartition-rh-france/

A+, O+, B+, A-, O-, AB+, B- et AB- sont les différents groupes sanguins combinés aux rhésus.
Par exemple : A+ est le groupe sanguin A de rhésus +.
Une expérience aléatoire consiste à choisir une personne au hasard dans la population fran-

çaise et à déterminer son groupe sanguin et son rhésus.
Dans l'exercice, on adopte les notations du type :

- $A+$ est l'événement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus + »
- $A-$ est l'événement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus - »
- A est l'événement « la personne est de groupe sanguin A »

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1
On note $Rh+$ l'événement « La personne est de rhésus positif ».

1. Justifier que la probabilité que la personne choisie soit de rhésus positif est égale à 0,849.
2. Démontrer à l'aide des données de l'énoncé que $P_{Rh+}(A) = 0{,}450$ à 0,001 près.
3. Une personne se souvient que son groupe sanguin est AB mais a oublié son rhésus. Quelle est la probabilité que son rhésus soit négatif ? Arrondir le résultat à 0,001 près.

Partie 2
Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 0,001 près.
Un donneur universel de sang est une personne de groupe sanguin O et de rhésus négatif. On rappelle que 6,5 % de la population est de groupe O-.

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.
   (a) Déterminer la probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels. Justifier votre réponse.
   (b) On considère la fonction ci-dessous nommée `proba` d'argument `k` écrite en langage Python.

```
def proba(k) :
    p = 0
    for i in range(k+1) :
        p = p + binomiale(i,50,0.065)
    return p
```

   Cette fonction utilise la fonction `binomiale` d'arguments `i`, `n` et `p`, créée pour l'occasion, qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   Déterminer la valeur numérique renvoyée par la fonction `proba` lorsqu'on saisit `proba(8)` dans la console Python. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Quel est le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999.

Correction
Partie 1

1. Le pourcentage de personnes de rhésus positif est égale à $38{,}2 + 36{,}5 + 7{,}7 + 2{,}5 = 84{,}9$. La proportion de personnes de rhésus positif est donc égale à 0,849 donc la probabilité que la

personne choisie soit de rhésus positif est :

$$\boxed{P(Rh+) = 0{,}849}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} P_{Rh+}(A) &= \frac{P(A \cap Rh+)}{P(Rh+)} \\ &= \frac{P(A+)}{P(Rh+)} \\ &= \frac{0{,}382}{0{,}849} \\ &\approx 0{,}450 \end{aligned}$$

La probabilité que la personne soit du groupe A sachant qu'elle est de rhésus positif est donc :

$$\boxed{P_{Rh+}(A) = 0{,}450}$$

3. Il s'agit de calculer $P_{AB}(Rh-)$:

$$\begin{aligned} P_{AB}(Rh-) &= \frac{P(AB \cap Rh-)}{P(AB)} \\ &= \frac{P(AB-)}{P(AB)} \\ &= \frac{0{,}004}{0{,}029} \quad \textit{(car } P(AB) = P(AB+) + P(AB-)\textit{)} \\ &\approx 0{,}138 \end{aligned}$$

La probabilité que son rhésus soit négatif sachant que la personne est du groupe AB est donc :

$$\boxed{P_{AB}(Rh-) \approx 0{,}138}$$

Partie 2

1.(a) On répète 50 fois une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (la personne est un donneur universel) est égale à 0,065. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}065$.
On obtient alors, à l'aide de la calculatrice que la probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels est :

$$\boxed{P(X = 8) \approx 0{,}010}$$

(b) La commande `proba(k)` renvoie la somme, pour i variant entre 0 et k, des probabilités $P(X = i)$. Elle renvoie donc la valeur de $P(X \leqslant k)$. La commande `proba(8)` renvoie donc la probabilité que parmi les 50 personnes, au plus 8 soient des donneurs universels, soit :

$$\boxed{P(X \leqslant 8) \approx 0{,}995}$$

2. On choisit n personnes dans la population française et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de donneurs universels parmi ces n personnes. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}065$. La probabilité qu'aucune personne de l'échantillon ne soit donneur universel est $P(Y = 0) = (1 - 0{,}065)^n = 0{,}935^n$. Par passage à l'événement contraire, la probabilité qu'au moins une personne soit donneur universel est :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}935^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}999 &\iff 1 - 0{,}935^n \geqslant 0{,}999 \\ &\iff 0{,}935^n \leqslant 0{,}001 \\ &\iff \ln\left(0{,}935^n\right) \leqslant \ln(0{,}001) \\ &\iff n\ln(0{,}935) \leqslant \ln(0{,}001) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}935)} \quad (\textit{car } \ln(0{,}935) < 0) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}935)} \approx 102{,}8$. Le nombre minimal de personnes à choisir pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel soit supérieure à 0,999 est donc :

$$\boxed{n = 103}$$

Commentaires

- Dans la question 1a, on peut, soit utiliser directement la fonction da la calculatrice calculant les probabilités dans le cas d'une loi binomiale donnée, soit appliquer la formule :

$$P(X = 8) = \binom{50}{8} \times 0{,}065^8 \times 0{,}935^{42}$$

17.2 Une suite et une équation différentielle dans un vrai-faux

Énoncé **(5 points)**

Cet exercice contient 5 affirmations.
Pour chaque affirmation, répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.
Toute absence de justification ou justification incorrecte ne sera pas prise en compte dans la notation.

Partie 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$.

1. **Affirmation 1 :** La suite (u_n) est décroissante minorée par 0.
2. **Affirmation 2 :** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
3. **Affirmation 3 :** La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$ est géométrique.

Partie 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \dfrac{3}{2}y + 2$ d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **Affirmation 4 :** Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).
2. Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,)$ on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f solution de (E) tel que $f(0) = 0$.
   Affirmation 5 : La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur $2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.

Correction

Partie 1

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 10$ et $u_1 = \dfrac{1}{3} \times 10 + 2 = \dfrac{16}{3} \approx 5{,}33$. On a donc bien $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :
     $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$
     On a alors, en multipliant par $\dfrac{1}{3}$:
     $$0 \leqslant \frac{1}{3}u_{n+1} \leqslant \frac{1}{3}u_n$$
     Puis, en ajoutant 2 :
     $$2 \leqslant \frac{1}{3}u_{n+1} + 2 \leqslant \frac{1}{3}u_n + 2$$
     Soit :
     $$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$
     Et donc a fortiori :
     $$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$
     La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
   - **Conclusion :**
     La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
     $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$
     Cela prouve que la suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et minorée par 0 (car $0 \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
2. **Affirmation 2 : Faux**
   La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle converge vers une limite l. Et comme la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction

définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 2$ et que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Or :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{1}{3}x + 2 = x \\ &\iff \frac{2}{3}x = 2 \\ &\iff x = 2 \times \frac{3}{2} \\ &\iff x = 3 \end{aligned}$$

La fonction f admet donc 3 pour unique point fixe, on en déduit que $l = 3$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

3. **Affirmation 3 : Vrai**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{3}(u_n - 3) \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

Partie 2

1. **Affirmation 4 : Vrai**
   Soit $k \in \mathbb{R}$ et f la fonction constante définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = k$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ et donc :

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{3}{2}f(x) + 2 &\iff 0 = \frac{3}{2}k + 2 \\ &\iff \frac{3}{2}k = -2 \\ &\iff k = -2 \times \frac{2}{3} \\ &\iff k = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

   La fonction constante $x \mapsto -\dfrac{4}{3}$ est donc solution de (E).

2. **Affirmation 5 :**

   - L'équation homogène associée $y' = \dfrac{3}{2}y$ admet pour solutions les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- On a vue, dans la question précédente, que l'équation différentielle (E) admettait pour solution particulière la fonction :
$$x \mapsto -\frac{4}{3}$$
- Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme :
$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$
- Soit alors f la solution qui vérifie $f(0) = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}$ et donc $f(0) = \lambda - \frac{4}{3}$. On a alors :
$$f(0) = 0 \Longleftrightarrow \lambda - \frac{4}{3} = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$
On a donc :
$$f(x) = \frac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}$$
- On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} = 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$$
Et donc :
$$f'(1) = 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\times 1} = 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$$
Et le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est égal au nombre dérivé de f en 1.

Commentaires

- Dans la question 3 de la partie 1, pour montrer que la suite (v_n) est géométrique, on peut également remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$ donc $u_n = v_n + 3$. On peut alors « dérouler » le calcul de la façon suivante :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{3}(v_n + 3) - 1 \\ &= \frac{1}{3}v_n + 1 - 1 \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

17.3 Une intégration par parties pour calculer une aire

Énoncé **(5 points)**

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 4)\mathrm{e}^{-x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)\mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^2 - 1$.
2. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n$$

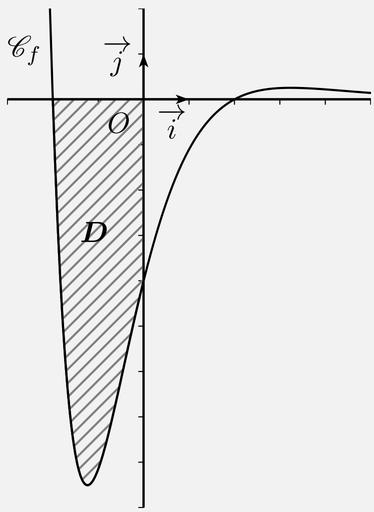
3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
2. On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

   Le domaine $\boldsymbol{D}$ du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

   Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine $\boldsymbol{D}$.



Correction

Partie 1

1. • **Limite en $-\infty$:**

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^2-4) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty \end{cases}$$

- **Limite en $+\infty$:**

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} - 4\mathrm{e}^{-x}$ d'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0 & \textit{(par croissances comparées)} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 4\mathrm{e}^{-x} = 0 \end{cases}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \times \mathrm{e}^{-x} + (x^2 - 4) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (-x^2 + 2x + 4)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

   Soit :

$$\boxed{f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)\mathrm{e}^{-x}}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 2x + 4$. Il s'agit d'un polynôme du second degré qui admet deux racines : $1 - \sqrt{5}$ et $1 + \sqrt{5}$. Et il est négatif à l'extérieur de l'intervalle des racines, d'où le tableau :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1-\sqrt{5})$	$\nearrow$	$f(1+\sqrt{5})$	$\searrow$	0

Partie 2

1. On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{0} \\ &= -\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-(-2)} \\ &= \mathrm{e}^2 - 1 \end{aligned}$$

   On a donc :

$$\boxed{I_0 = \mathrm{e}^2 - 1}$$

2. On a $I_{n+1} = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Posons alors, pour tout $x \in [-2\,;\,0]$:

$$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}I_{n+1} &= \Big[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -(n+1)x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)\int_{-2}^{0} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n}$$

3. On calcule alors, de proche en proche :

$$I_1 = (-2)^1\mathrm{e}^2 + I_0 = -2\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 - 1 = -\mathrm{e}^2 - 1$$

Et :

$$I_2 = (-2)^2\mathrm{e}^2 + 2I_1 = 4\mathrm{e}^2 + 2(-\mathrm{e}^2 - 1) = 2\mathrm{e}^2 - 2$$

Soit :

$$\boxed{I_1 = -\mathrm{e}^2 - 1} \quad \text{et} \quad \boxed{I_2 = 2\mathrm{e}^2 - 2}$$

Partie 3

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $x^2 - 4$. Il s'agit d'un polynôme du second degré qui admet -2 et 2 pour racines et qui est positif à l'extérieur de l'intervalle des racines. On en déduit le tableau :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. La fonction f étant négative entre -2 et 0, il s'agit de calculer la valeur opposée de l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$. Or :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{0}(x^2-4)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{0} x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - 4\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= I_2 - 4I_0 \\ &= 2\mathrm{e}^2 - 2 - 4(\mathrm{e}^2 - 1) \\ &= 2\mathrm{e}^2 - 2 - 4\mathrm{e}^2 + 4 \\ &= -2\mathrm{e}^2 + 2 \\ &= -2(\mathrm{e}^2 - 1)\end{aligned}$$

La valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine $\boldsymbol{D}$ est donc :

$$\boxed{-\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2(\mathrm{e}^2 - 1)}$$

Commentaires

- Dans la question 1, pour la limite en $+\infty$, on utilise la formule de croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$$

Ce n'est pas exactement la formule du cours qui est :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$$

Si l'on veut être vraiment rigoureux et se ramener à la formule du cours, on peut écrire, pour tout $x \neq 0$:

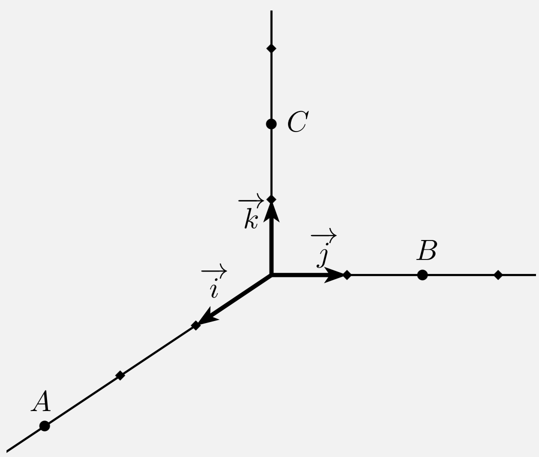
$$\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}}$$

Et ainsi, comme le dénominateur tend vers $+\infty$, le quotient tend vers 0.

17.4 Aires des faces d'un tétraèdre

Énoncé **(5 points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,;\,\vec{k}\,)$.
On considère les trois points $A(3\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,2\,;\,0)$ et $C(0\,;\,0\,;\,2)$.



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :
« Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des 3 autres faces du tétraèdre $OABC$ ».

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2\,;\,3\,;\,3)$ est normal au plan (ABC).
2. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + 3y + 3z - 6 = 0$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$.

4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC). Déterminer les coordonnées du point H.
5. En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à $\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Démontrer que le volume du tétraèdre $OABC$ est égal à 2.
2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{22}$.
3. Démontrer que pour le tétraèdre $OABC$, *« le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des 3 autres faces du tétraèdre ». On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \dfrac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.*

Correction
Partie 1

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ d'où :
   - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2 \times -3 + 3 \times 2 + 3 \times 0 = -6 + 6 = 0$
   - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2 \times -3 + 3 \times 0 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$

   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), on en déduit que :
   $$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est normal au plan } (ABC)}$$

2. Le plan (ABC) admettant le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal, il admet une équation cartésienne de la forme :
   $$2x + 3y + 3z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$
   De plus, le point A appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, soit $2 \times 3 + 3 \times 0 + 3 \times 0 + d = 0$ et donc $d = -6$. Une équation du plan (ABC) est donc :
   $$\boxed{2x + 3y + 3z - 6 = 0}$$

3. La droite d passe par $O(0\,;\,0\,;\,0)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur, elle admet donc pour représentation paramétrique :
   $$\boxed{\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}}$$

4. On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de d dans l'équation cartésienne du plan (ABC) :

$$\begin{aligned} 2\times 2t+3\times 3t+3\times 3t-6=0 &\Longleftrightarrow 4t+9t+9t-6=0 \\ &\Longleftrightarrow 22t=6 \\ &\Longleftrightarrow t=\frac{3}{11} \end{aligned}$$

Le point H est donc le point de paramètre $t=\dfrac{3}{11}$ dans la représentation paramétrique de d, soit :

$$\boxed{H\left(\frac{6}{11}\,;\,\frac{9}{11}\,;\,\frac{9}{11}\right)}$$

5. Le point H étant le point d'intersection du plan (ABC) avec la droite passant par O perpendiculairement à ce plan, il s'agit du projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC). La distance du point O au plan (ABC) est donc la distance OH.

$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2+\left(\frac{9}{11}\right)^2+\left(\frac{6}{11}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{6^2+9^2+9^2}{11^2}} \\ &= \frac{\sqrt{198}}{11} \\ &= \frac{3\sqrt{22}}{11} \end{aligned}$$

La distance du point O au plan (ABC) est donc :

$$\boxed{\frac{3\sqrt{22}}{11}}$$

Partie 2

1. Pour calculer le volume $\mathscr{V}$ du tétraèdre $OABC$, on peut choisir pour base la face OAB, la hauteur correspondante est alors OC. L'aire de la base OAB est alors :

$$\mathscr{A}_{OAB}=\frac{OA\times OB}{2}=\frac{3\times 2}{2}=3$$

On a alors :

$$\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}_{OAB}\times OC=\frac{1}{3}\times 3\times 2=2$$

Le volume du tétraèdre $OABC$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{V}=2}$$

2. Dans le tétraèdre $0ABC$, si on choisit ABC pour base alors la hauteur correspondante est OH et, en notant $\mathscr{A}_{OAB}$ l'aire du triangle ABC, le volume est donné par la formule :

$$\mathscr{V}=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}_{ABC}\times OH=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}_{ABC}\times\frac{3\sqrt{22}}{11}=\frac{\sqrt{22}}{11}\mathscr{A}_{ABC}$$

Et comme, d'après la question précédente, ce volume est égal à 2, on a :

$$\frac{\sqrt{22}}{11}\mathscr{A}_{ABC} = 2$$

D'où :

$$\mathscr{A}_{ABC} = 2 \times \frac{11}{\sqrt{22}} = \frac{22}{\sqrt{22}} = \sqrt{22}$$

L'aire du triangle ABC est donc :

$$\boxed{\mathscr{A}_{ABC} = \sqrt{22}}$$

3. Les aires des faces OAB, OAC et OBC sont respectivement :

$$\mathscr{A}_{OAB} = 3 \qquad \mathscr{A}_{OAC} = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \qquad \mathscr{A}_{OBC} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

On a alors d'une part :

$$\mathscr{A}^2_{ABC} = \sqrt{22}^2 = 22$$

Et d'autre part :

$$\mathscr{A}^2_{OAB} + \mathscr{A}^2_{OAC} + \mathscr{A}^2_{OBC} = 3^2 + 3^2 + 2^2 = 9 + 9 + 4 = 22$$

On a donc bien :

$$\boxed{\mathscr{A}^2_{ABC} = \mathscr{A}^2_{OAB} + \mathscr{A}^2_{OAC} + \mathscr{A}^2_{OBC}}$$

Commentaires

- Dans la question 2, juste une petite simplification que je n'ai pas détaillée :

$$\frac{22}{\sqrt{22}} = \frac{\sqrt{22}^2}{\sqrt{22}} = \sqrt{22}$$

SUJET 18

POLYNÉSIE - 5 SEPTEMBRE 2024 (REMPLACEMENT)

18.1 Hybride ou électrique

Énoncé **(5 points)**

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.
On choisit un acheteur au hasard et on considère les événements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

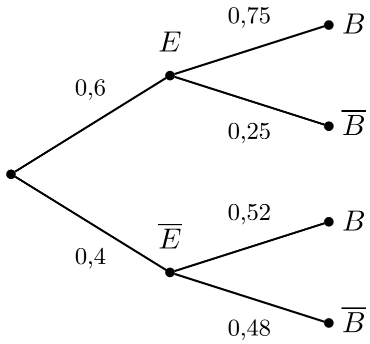
Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

1. Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(B) = 0{,}658$.
3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique ?
4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.
   (a) Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   (b) Calculer $P(X = 8)$.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.
   (d) Calculer l'espérance de X.
   (e) La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte

1 200 €.
En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules ?

Correction

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Il s'agit alors de calculer $P(E \cap B)$:

$$\begin{aligned} P(E \cap B) &= P(E) \times P_E(B) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}75 \\ &= 0{,}45 \end{aligned}$$

La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est donc :

$$\boxed{P(E \cap B) = 0{,}45}$$

2. Les événements E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(E) \times P_E(B) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(B) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}75 + 0{,}4 \times 0{,}52 \\ &= 0{,}45 + 0{,}208 \\ &= 0{,}658 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{P(B) = 0{,}658}$$

3. Il s'agit de calculer $P_B(E)$:

$$\begin{aligned} P_B(E) &= \frac{P(E \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{0{,}45}{0{,}658} \\ &\approx 0{,}684 \end{aligned}$$

La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique sachant qu'il a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est donc :

$$\boxed{P_B(E) \approx 0{,}684}$$

4.(a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (l'acheteur peut installer une borne de recharge à son domicile) est égale à 0,658. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 20 \text{ et } p = 0{,}658}$$

(b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

$$\boxed{P(X = 8) \approx 0{,}011}$$

(c) Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 10)$. On obtient alors, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge est :

$$\boxed{P(X \geqslant 10) \approx 0{,}955}$$

(d) L'espérance de X est donnée par la formule $E(X) = n \times p = 20 \times 0{,}658 = 13{,}16$, soit :

$$\boxed{E(X) = 13{,}16}$$

(e) En moyenne, lors de la vente de 20 véhicules, il y a en a 13,16 qui ont la possibilité d'installer une borne de recharge. On a alors $13{,}16 \times 1\,200 = 15\,792$. Pour la vente de 20 véhicules, la directrice devra donc prévoir d'engager, en moyenne, la somme de :

$$\boxed{15\,792 \text{ €}}$$

Commentaires

- Dans la question 4b, on peut détailler le calcul :

$$P(X = 8) = \binom{20}{8} \times 0{,}658^8 \times (1 - 0{,}658)^{12}$$

18.2 Un QCM sur les fonctions

Énoncé **(6 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + x$.
   Affirmation A : La fonction f admet pour tableau de variations le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$+\infty$

Affirmation B : L'équation $f(x) = -2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

2. **Affirmation C :**
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$
3. On considère la fonction k définie et continue sur $\mathbb{R}$ par :
$$k(x) = 1 + 2\mathrm{e}^{-x^2+1}$$
Affirmation D : Il existe une primitive de la fonction k décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. On considère l'équation différentielle (E) : $3y' + y = 1$.
Affirmation E : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$$
est solution de l'équation différentielle (E) avec $g(0) = 5$.
5. **Affirmation F :** Une intégration par parties permet d'obtenir :
$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$$

Correction

1. **Affirmation A : Vrai**
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = \mathrm{e}^x + 1$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{cases}$$
Et :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{cases}$$
On a donc bien le tableau :

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$+\infty$

Affirmation B : Faux
Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Or $-2 \in]-\infty\,;+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2. **Affirmation C : Vrai**
Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :
$$\begin{aligned}\frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} &= \frac{x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}\right)}{3x^2}\\ &= \frac{\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}}{3}\end{aligned}$$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$ et, par croissance comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

3. **Affirmation D : Faux**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$ donc $k'(x) > 0$. Soit K une primitive de k alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K'(x) = k(x) > 0$. Donc la fonction K est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. **Affirmation E : Vrai**
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g'(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$
Et donc :
$$\begin{aligned}3g'(x) + g(x) &= 3 \times \left(-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right) + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1\\ &= -4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1\\ &= 1\end{aligned}$$
Et comme $g(0) = 4+1 = 5$, g est la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $g(0) = 5$.

5. **Affirmation F : Vrai**
Pour tout $x \in [0\,;1]$, on pose :
$$\begin{cases}u(x) = x\\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x}\end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases}u'(x) = 1\\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x}\end{cases}$$
On a alors, par intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1\\ &= -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1\\ &= 1 - 2\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$
Soit :
$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$$

Commentaires

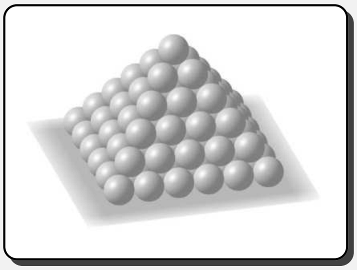
- Dans la question 4, on aurait également pu résoudre l'équation différentielle de manière classique : ensemble des solutions de l'équation homogène associée, solution particulière, ensemble des solutions de l'équation de départ, solution vérifiant une condition initiale.

18.3 Une pyramide de boules

Énoncé **(4 points)**

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1^er^ étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2^e^ étage, niveau juste en-dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3^e^ étage possède 9 boules ;
- ...
- le n-ième étage possède n^2 boules.



Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.
2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
   (a) Calculer S_5 et interpréter ce résultat.
   (b) On considère la fonction `pyramide` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python. Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1,n+1) :
        S = ...
    return ...
```

   (c) Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6}$$

   (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible ?

Correction

1. Le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages est :

$$1^2+2^2+3^2+4^2=1+4+9+16=30$$

Soit :

$$\boxed{30 \text{ boules}}$$

2.(a) On a $S_5=S_4+5^2=30+25=55$. On en déduit que le nombre total de boules d'une pyramide de 5 étages est :

$$\boxed{S_5=55}$$

(b) On peut compléter le programme de la façon suivante :

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1,n+1) :
        S = S + i**2
    return S
```

(c) Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n^2+n)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6}\\ &= \frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6)}{6}\\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6)}{6}\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \frac{2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6}{6}\\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6)}{6}\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6}}$$

(d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
  On a alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \textit{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6} \quad \textit{(d'après 2c)} \end{aligned}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit :

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

3. On obtient, à l'aide de la calculatrice :
   - $S_7 = 140 \leqslant 200$
   - $S_8 = 204 > 200$

   Le marchand peut donc construire 7 étages en utilisant :

$$\boxed{\text{140 oranges}}$$

Commentaires

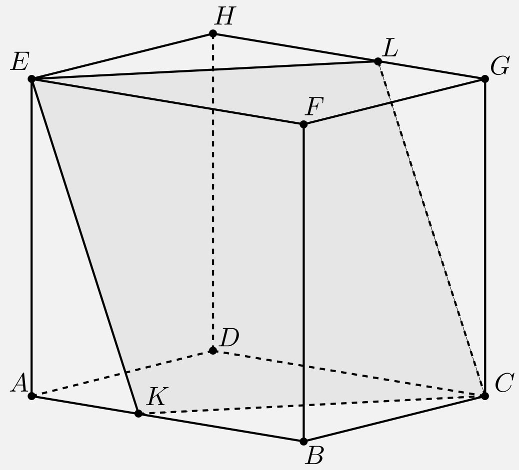
- Dans la question 2c, on aurait pu partir de l'expression et dérouler les calculs jusqu'à obtenir l'autre expression mais il aurait alors fallu factoriser. Dans ce cas, je trouve plus simple de rédiger avec un « d'une part ..., d'autre part ».

18.4 Un losange dans un cube

Énoncé **(5 points)**

On considère un cube $ABCDEFGH$ et l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE})$. Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K(m\,;\,0\,;\,0) \quad \text{et} \quad L(1-m\,;\,1\,;\,1)$$



1. Donner les coordonnées des points E et C dans ce repère.
2. Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point $L(1\,;\,1\,;\,1)$ est confondu avec le point G, le point $K(0\,;\,0\,;\,0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).
   (a) Justifier que le vecteur $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan (GEA).
   (b) Déterminer une équation cartésienne du plan (GEA).

On s'intéresse désormais à la nature de $CKEL$ en fonction du paramètre m.

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   (a) Démontrer que $CKEL$ est un parallélogramme.
   (b) Justifier que $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = m(m-1)$.
   (c) Démontrer que $CKEL$ est un rectangle si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$.
4. Dans cette question, $m = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$.
   (a) Démontrer que le parallélogramme $CKEL$ est alors un losange.
   (b) À l'aide de la question 3b, déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{CKE}$.

Correction

1. On a :

$$\boxed{E(0\,;\,0\,;\,1)} \quad \text{et} \quad \boxed{C(1\,;\,1\,;\,0)}$$

2.(a) On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AE} = 1 \times 0 - 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$
- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AG} = 1 \times 1 - 1 \times 1 + 0 \times 1 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GEA), on en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{DB} \text{ est normal au plan } (GEA)}$$

(b) D'après la question précédente, le plan (GEA) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $A(0\,;\,0\,;\,0)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation, d'où $0 - 0 + d = 0$, soit $d = 0$. Le plan (GEA) admet donc pour équation :

$$\boxed{x - y = 0}$$

3.(a) On a $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}m-1\\0-1\\0-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix}m-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix}0-(1-m)\\0-1\\1-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix}m-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. On a donc $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{LE}$, on en déduit que :

$$\boxed{CKEL \text{ est un parallélogramme}}$$

(b) On a $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1-m\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-m\\0\\1\end{pmatrix}$ d'où :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = (1-m) \times (-m) + 1 \times 0 + 0 \times 1$$

Soit :

$$\boxed{\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = m(m-1)}$$

(c) Le quadrilatère $CKEL$ étant un parallélogramme, c'est un rectangle si et seulement si l'angle $\widehat{CKE}$ est un angle droit, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KE}$ sont orthogonaux. Or :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KC} \text{ et } \overrightarrow{KE} \text{ sont orthogonaux} &\iff \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = 0\\ &\iff m(m-1) = 0 \quad \textit{(d'après la question précédente)}\\ &\iff m = 0 \quad \text{ou} \quad m = 1\end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{CKEL \text{ est un rectangle} \iff m = 0 \text{ ou } m = 1}$$

4.(a) On a :

- $CK = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
- $KE = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

On a $CK = KE$ donc $CKEL$ est un parallélogramme qui a deux côtés adjacents de même longueur. On en déduit que :

$$\boxed{CKEL \text{ est un losange}}$$

(b) D'une part, d'après la question 3b, en prenant $m = \frac{1}{2}$, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} &= KC \times KE \times \cos\left(\widehat{CKE}\right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right) \\ &= \frac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right) = -\frac{1}{4}$$

Soit :

$$\cos\left(\widehat{CKE}\right) = -\frac{1}{5}$$

On obtient alors, à l'aide de la calculatrice :

$$\boxed{\widehat{CKE} \approx 102^\circ}$$

Commentaires

- Il existe d'autres méthodes pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme. On peut par exemple montrer que les diagonales se coupent en leur milieu.
- Il existe d'autres méthodes pour montrer qu'un parallélogramme est un losange. On peut par exemple montrer que les diagonales sont perpendiculaires.
- Dans la question 4b, afin de déterminer une mesure de l'angle connaissant son cosinus, on utilise la touche $\cos^{-1}$ ou arccos de la calculatrice. On fera bien attention d'être en mode « degrés ».