Polynésie - 5 septembre 2024 (remplacement)

Spécialité mathématiques - Baccalauréat

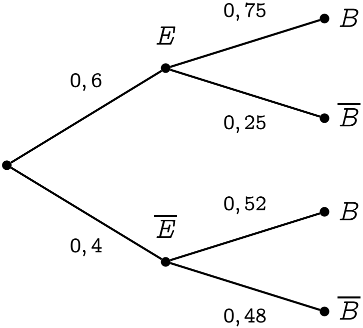
Exercice 1

Exercice 1

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :

Exercice 1

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Il s'agit alors de calculer $P(E \cap B)$:

Il s'agit alors de calculer $P(E \cap B)$:

$$P(E \cap B) =$$

Il s'agit alors de calculer $P(E \cap B)$:

$$P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B)$$

Il s'agit alors de calculer $P(E \cap B)$:

$$\begin{aligned} P(E \cap B) &= P(E) \times P_E(B) \\ &= 0,6 \times 0,75 \end{aligned}$$

Il s’agit alors de calculer $P(E \cap B)$:

$$\begin{aligned} P(E \cap B) &= P(E) \times P_E(B) \\ &= 0,6 \times 0,75 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

Il s'agit alors de calculer $P(E \cap B)$:

$$\begin{aligned} P(E \cap B) &= P(E) \times P_E(B) \\ &= 0,6 \times 0,75 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est donc :

Il s'agit alors de calculer $P(E \cap B)$:

$$\begin{aligned} P(E \cap B) &= P(E) \times P_E(B) \\ &= 0,6 \times 0,75 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est donc :

$$\boxed{P(E \cap B) = 0,45}$$

2. Les événements E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

2. Les événements E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) =$$

2. Les événements E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = P(E) \times P_E(B) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(B)$$

2. Les événements E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(E) \times P_E(B) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(B) \\ &= 0,6 \times 0,75 + 0,4 \times 0,52 \end{aligned}$$

2. Les événements E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(E) \times P_E(B) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(B) \\ &= 0,6 \times 0,75 + 0,4 \times 0,52 \\ &= 0,45 + 0,208 \end{aligned}$$

2. Les événements E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(E) \times P_E(B) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(B) \\ &= 0,6 \times 0,75 + 0,4 \times 0,52 \\ &= 0,45 + 0,208 \\ &= 0,658 \end{aligned}$$

2. Les événements E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(E) \times P_E(B) + P(\overline{E}) \times P_{\overline{E}}(B) \\ &= 0,6 \times 0,75 + 0,4 \times 0,52 \\ &= 0,45 + 0,208 \\ &= 0,658 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{P(B) = 0,658}$$

3. Il s'agit de calculer $P_B(E)$:

3. Il s'agit de calculer $P_B(E)$:

$$P_B(E) =$$

3. Il s'agit de calculer $P_B(E)$:

$$P_B(E) = \frac{P(E \cap B)}{P(B)}$$

3. Il s'agit de calculer $P_B(E)$:

$$\begin{aligned} P_B(E) &= \frac{P(E \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{0,45}{0,658} \end{aligned}$$

3. Il s'agit de calculer $P_B(E)$:

$$\begin{aligned} P_B(E) &= \frac{P(E \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{0,45}{0,658} \\ &\approx 0,684 \end{aligned}$$

3. Il s'agit de calculer $P_B(E)$:

$$\begin{aligned} P_B(E) &= \frac{P(E \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{0,45}{0,658} \\ &\approx 0,684 \end{aligned}$$

La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique sachant qu'il a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est donc :

3. Il s'agit de calculer $P_B(E)$:

$$\begin{aligned} P_B(E) &= \frac{P(E \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{0,45}{0,658} \\ &\approx 0,684 \end{aligned}$$

La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique sachant qu'il a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est donc :

$$\boxed{P_B(E) \approx 0,684}$$

4. (a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (l'acheteur peut installer une borne de recharge à son domicile) est égale à $0,658$.

4. (a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (l'acheteur peut installer une borne de recharge à son domicile) est égale à $0,658$. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès donc :

4. (a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (l'acheteur peut installer une borne de recharge à son domicile) est égale à $0,658$. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 20 \text{ et } p = 0,658}$$

4. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

4. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

$$\boxed{P(X=8) \approx 0,011}$$

4. (c) Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 10)$.

4. (c) Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 10)$. On obtient alors, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge est :

4. (c) Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 10)$. On obtient alors, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge est :

$$\boxed{P(X \geqslant 10) \approx 0,955}$$

4. (d) L'espérance de X est donnée par la formule
$E(X) =$

4. (d) L'espérance de X est donnée par la formule
$E(X) = n \times p$

4. (d) L'espérance de X est donnée par la formule
$E(X) = n \times p = 20 \times 0,658$

4. (d) L'espérance de X est donnée par la formule
$E(X) = n \times p = 20 \times 0,658 = 13,16,$

4. (d) L'espérance de X est donnée par la formule
$E(X) = n \times p = 20 \times 0,658 = 13,16$, soit :

$$\boxed{E(X) = 13,16}$$

4. (e) En moyenne, lors de la vente de 20 véhicule, il y a en a 13,16 qui ont la possibilité d'installer une borne de recharge.

4. (e) En moyenne, lors de la vente de 20 véhicule, il y a en a 13,16 qui ont la possibilité d'installer une borne de recharge. On a alors
$13,16 \times 1\,200 =$

4. (e) En moyenne, lors de la vente de 20 véhicule, il y a en a 13,16 qui ont la possibilité d'installer une borne de recharge. On a alors $13,16 \times 1\,200 = 15\,792$.

4. (e) En moyenne, lors de la vente de 20 véhicule, il y a en a 13,16 qui ont la possibilité d'installer une borne de recharge. On a alors $13,16 \times 1\,200 = 15\,792$. Pour la vente de 20 véhicules, la directrice devra donc prévoir d'engager, en moyenne, la somme de :

4. (e) En moyenne, lors de la vente de 20 véhicule, il y a en a 13,16 qui ont la possibilité d'installer une borne de recharge. On a alors $13,16 \times 1\,200 = 15\,792$. Pour la vente de 20 véhicules, la directrice devra donc prévoir d'engager, en moyenne, la somme de :

$$\boxed{15\,792 \text{ €}}$$

Exercice 2

Exercice 2

1. **Affirmation A : Vrai**

Exercice 2

1. **Affirmation A : Vrai**
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Exercice 2

1. **Affirmation A : Vrai**
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) =$$

Exercice 2

1. **Affirmation A : Vrai**
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + 1$$

Exercice 2

1. **Affirmation A : Vrai**
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x} + 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x} > 0$

1. **Affirmation A : Vrai**
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x) > 0$.

Exercice 2

1. **Affirmation A : Vrai**
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1. **Affirmation A : Vrai**
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Exercice 2

1. **Affirmation A : Vrai**
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} x = -\infty \end{cases}$$

1. **Affirmation A : Vrai**
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x + 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{cases}$$

Et :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

1. **Affirmation A : Vrai**
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x} + 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \end{cases}$$

Et :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

On a donc bien le tableau :

On a donc bien le tableau :

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Affirmation B : Faux

Affirmation B : Faux

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue et strictement croissante.

Affirmation B : Faux

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Affirmation B : Faux

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $-2 \in \left]-\infty\,;+\infty\right[$

Affirmation B : Faux

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $-2 \in]-\infty\,; +\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

Affirmation B : Faux

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $-2 \in]-\infty\,;+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2. **Affirmation C : Vrai**

2. **Affirmation C : Vrai**

Pour tout $x \in \,]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} =$$

2. **Affirmation C : Vrai**
Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = \frac{x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}\right)}{3x^2}$$

2. **Affirmation C : Vrai**

   Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x)-x^2+2}{3x^2} &= \frac{x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right)}{3x^2}\\ &= \frac{\frac{\ln(x)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}}{3}\end{aligned}$$

2. **Affirmation C : Vrai**

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = \frac{x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}\right)}{3x^2} = \frac{\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}}{3}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$

2. **Affirmation C : Vrai**

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = \frac{x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}\right)}{3x^2}$$
$$= \frac{\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}}{3}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2} = 0$ et, par croissance comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$

2. **Affirmation C : Vrai**

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x)-x^2+2}{3x^2} &= \frac{x^2\left(\frac{\ln(x)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right)}{3x^2}\\ &= \frac{\frac{\ln(x)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}}{3}\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$ et, par croissance comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$
donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)-x^2+2}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

3. **Affirmation D : Faux**

3. **Affirmation D : Faux**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$

3. **Affirmation D : Faux**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$ donc $k'(x) > 0$.

3. **Affirmation D : Faux**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$ donc $k'(x) > 0$. Soit K une primitive de k

3. **Affirmation D : Faux**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$ donc $k'(x) > 0$. Soit K une primitive de k alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K'(x) =$

3. **Affirmation D : Faux**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$ donc $k'(x) > 0$. Soit K une primitive de k alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K'(x) = k(x)$

3. **Affirmation D : Faux**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$ donc $k'(x) > 0$. Soit K une primitive de k alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K'(x) = k(x) > 0$.

3. **Affirmation D : Faux**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x^2+1} > 0$ donc $k'(x) > 0$. Soit K une primitive de k alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K'(x) = k(x) > 0$. Donc la fonction K est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. **Affirmation E : Vrai**

4. **Affirmation E : Vrai**
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$.

4. **Affirmation E : Vrai**
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

4. **Affirmation E : Vrai**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) =$$

4. **Affirmation E : Vrai**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

4. **Affirmation E : Vrai**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

Et donc :

$$3g'(x) + g(x) =$$

4. **Affirmation E : Vrai**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

Et donc :

$$3g'(x) + g(x) = 3 \times \left(-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right) + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$$

4. **Affirmation E : Vrai**
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} 3g'(x) + g(x) &= 3 \times \left(-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right) + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\ &= -4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 \end{aligned}$$

4. **Affirmation E : Vrai**
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
3g'(x) + g(x) &= 3 \times \left(-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right) + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\
&= -4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

4. **Affirmation E : Vrai**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} 3g'(x) + g(x) &= 3 \times \left(-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right) + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\ &= -4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et comme $g(0) =$

4. **Affirmation E : Vrai**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} 3g'(x) + g(x) &= 3 \times \left(-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right) + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\ &= -4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et comme $g(0) = 4 + 1$

4. **Affirmation E : Vrai**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} 3g'(x) + g(x) &= 3 \times \left(-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right) + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\ &= -4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et comme $g(0) = 4 + 1 = 5$,

4. **Affirmation E : Vrai**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} 3g'(x) + g(x) &= 3 \times \left(-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}\right) + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\ &= -4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et comme $g(0) = 4 + 1 = 5$, g est la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $g(0) = 5$.

5. **Affirmation F : Vrai**

5. **Affirmation F : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

5. **Affirmation F : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

5. **Affirmation F : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

5. **Affirmation F : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

5. **Affirmation F : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 \end{aligned}$$

5. **Affirmation F : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 \end{aligned}$$

5. **Affirmation F : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 \\ &= 1 - 2\mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

5. **Affirmation F : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 \\ &= 1 - 2\mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}$$

Exercice 3

1. Le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages est :

Exercice 3

1. Le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages est :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 =$$

Exercice 3

1. Le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages est :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16$$

Exercice 3

1. Le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages est :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

Exercice 3

1. Le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages est :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

Soit :

$$\boxed{\text{30 boules}}$$

2. (a) On a $S_5 =$

2. (a) On a $S_5 = S_4 + 5^2$

2. (a) On a $S_5 = S_4 + 5^2 = 30 + 25$

2. (a) On a $S_5 = S_4 + 5^2 = 30 + 25 = 55$.

2. (a) On a $S_5 = S_4 + 5^2 = 30 + 25 = 55$. On en déduit que le nombre total de boules d'une pyramide de 5 étages est :

2. (a) On a $S_5 = S_4 + 5^2 = 30 + 25 = 55$. On en déduit que le nombre total de boules d'une pyramide de 5 étages est :

$$\boxed{S_5 = 55}$$

2. (b) On peut compléter le programme de la façon suivante :

2. (b) On peut compléter le programme de la façon suivante :

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1,n+1) :
        S = S + i**2
    return S
```

2. (c) Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

2. (c) Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

2. (c) Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

2. (c) Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n^2+n)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6}\end{aligned}$$

2. (c) Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n^2+n)(2n+1) + 6(n^2+2n+1)}{6} \\
&= \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6)}{6}
\end{aligned}$$

2. (c) Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n^2+n)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6}\\ &= \frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6)}{6}\\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6)}{6}\end{aligned}$$

2. (c) Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n^2+n)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6}\\ &= \frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6)}{6}\\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6)}{6}\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6} =$$

2. (c) Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(n^2+n)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6}$$

$$=\frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6)}{6}$$

$$=\frac{2n^3+9n^2+13n+6)}{6}$$

Et d'autre part :

$$\frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

2. (c) Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n^2+n)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6}\\ &= \frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6)}{6}\\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6)}{6}\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

2. (c) Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

$$\begin{aligned}
\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\
&= \frac{(n^2+n)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6}\\
&= \frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6)}{6}\\
&= \frac{2n^3+9n^2+13n+6)}{6}
\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\\
&= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6}\\
&= \frac{2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6}{6}
\end{aligned}$$

2. (c) Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}\\ &= \frac{(n^2+n)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6}\\ &= \frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6)}{6}\\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6)}{6}\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \frac{2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6}{6}\\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6)}{6}\end{aligned}$$

2. (c) Pour tout entier naturel n, on a d'une part :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(n^2+n)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6}$$
$$= \frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6)}{6}$$
$$= \frac{2n^3+9n^2+13n+6)}{6}$$

Et d'autre part :

$$\frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
$$= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6}$$
$$= \frac{2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6}{6}$$
$$= \frac{2n^3+9n^2+13n+6)}{6}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6}}$$

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation :**

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part
  $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} =$

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part
  $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6}$

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part
  $$\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1.$$

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part
  $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.
- **Hérédité :**

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$,

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a alors :

  $$S_{n+1} =$$

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Initialisation :**
Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.
- **Hérédité :**
Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a alors :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \textit{(hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \textit{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)\,(2(n+1)+1)}{6} \quad \textit{(d'après 2.(c))} \end{aligned}$$

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation :**
Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.
- **Hérédité :**
Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \textit{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)\,(2(n+1)+1)}{6} \quad \textit{(d'après 2.(c))} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation :**
Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part
$\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.
- **Hérédité :**
Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire
$S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \textit{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6} \quad \textit{(d'après 2.(c))}
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion :**

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a alors :
  $$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \textit{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6} \quad \textit{(d'après 2.(c))} \end{aligned}$$
  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire,

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Initialisation :**

  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.

- **Hérédité :**

  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \textit{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)\,(2(n+1)+1)}{6} \quad \textit{(d'après 2.(c))} \end{aligned}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion :**

  La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = \dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On a alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \textit{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)\left(2(n+1)+1\right)}{6} \quad \textit{(d'après 2.(c))} \end{aligned}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit :

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

3. On obtient, à l'aide de la calculatrice :

3. On obtient, à l'aide de la calculatrice :

   - $S_7 = 140 \leqslant 200$

3. On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $S_7 = 140 \leqslant 200$
- $S_8 = 204 > 200$

3. On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $S_7 = 140 \leqslant 200$
- $S_8 = 204 > 200$

Le marchand peut donc construire 7 étages en utilisant :

3. On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $S_7 = 140 \leqslant 200$
- $S_8 = 204 > 200$

Le marchand peut donc construire 7 étages en utilisant :

$$\boxed{\text{140 oranges}}$$

Exercice 4

1. On a :

$$\boxed{E(0\,;\,0\,;\,1)}$$

Exercice 4

1. On a :

$$\boxed{E(0\,;0\,;1)} \quad \text{et} \quad \boxed{C(1\,;1\,;0)}$$

2. (a) On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

2. (a) On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

2. (a) On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AE} =$

2. (a) On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AE} = 1 \times 0 - 1 \times 0 + 0 \times 1$

2. (a) On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AE} = 1 \times 0 - 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$

2. (a) On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AE} = 1 \times 0 - 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$
- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AG} =$

2. (a) On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AE} = 1 \times 0 - 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$
- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AG} = 1 \times 1 - 1 \times 1 + 0 \times 1$

2. (a) On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AE} = 1 \times 0 - 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$
- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AG} = 1 \times 1 - 1 \times 1 + 0 \times 1 = 0$

2. (a) On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AE} = 1 \times 0 - 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$
- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AG} = 1 \times 1 - 1 \times 1 + 0 \times 1 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GEA),

2. (a) On a $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AE} = 1 \times 0 - 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$
- $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AG} = 1 \times 1 - 1 \times 1 + 0 \times 1 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GEA), on en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{DB} \text{ est normal au plan } (GEA)}$$

2. (b) D'après la question précédente, le plan (GEA) admet une équation cartésienne de la forme :

2. (b) D'après la question précédente, le plan (GEA) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

2. (b) D'après la question précédente, le plan (GEA) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $A(0\,;\,0\,;\,0)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation,

2. (b) D'après la question précédente, le plan (GEA) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $A(0\,;\,0\,;\,0)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation, d'où $0 - 0 + d = 0$,

2. (b) D'après la question précédente, le plan (GEA) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $A(0\,;0\,;0)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation, d'où $0 - 0 + d = 0$, soit $d = 0$.

2. (b) D'après la question précédente, le plan (GEA) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $A(0\,;\,0\,;\,0)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation, d'où $0 - 0 + d = 0$, soit $d = 0$. Le plan (GEA) admet donc pour équation :

2. (b) D'après la question précédente, le plan (GEA) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $A(0\,;\,0\,;\,0)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation, d'où $0 - 0 + d = 0$, soit $d = 0$. Le plan (GEA) admet donc pour équation :

$$\boxed{x - y = 0}$$

3. (a) On a $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} m-1 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$

3. (a) On a $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} m-1 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} m-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. (a) On a $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} m-1 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} m-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} 0-(1-m) \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix}$

3. (a) On a $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} m-1 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} m-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} 0-(1-m) \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} m-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. (a) On a $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} m-1 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} m-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} 0-(1-m) \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} m-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{LE}$,

3. (a) On a $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} m-1 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CK}\begin{pmatrix} m-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} 0-(1-m) \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{LE}\begin{pmatrix} m-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{LE}$, on en déduit que :

$$\boxed{CKEL \text{ est un parallélogramme}}$$

3. (b) On a $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1-m\\1\\0\end{pmatrix}$

3. (b) On a $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1-m\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-m\\0\\1\end{pmatrix}$

3. (b) On a $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1-m\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-m\\0\\1\end{pmatrix}$ d'où :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} =$$

3. (b) On a $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1-m\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-m\\0\\1\end{pmatrix}$ d'où :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = (1-m)\times(-m) + 1\times 0 + 0\times 1$$

3. (b) On a $\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix}1-m\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KE}\begin{pmatrix}-m\\0\\1\end{pmatrix}$ d'où :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = (1-m)\times(-m)+1\times 0+0\times 1$$

Soit :

$$\boxed{\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = m(m-1)}$$

3. (c) Le quadrilatère $CKEL$ étant un parallélogramme, c'est un rectangle si et seulement si l'angle $\widehat{CKE}$ est un angle droit,

3. (c) Le quadrilatère $CKEL$ étant un parallélogramme, c'est un rectangle si et seulement si l'angle $\widehat{CKE}$ est un angle droit, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KE}$ sont orthogonaux.

3. (c) Le quadrilatère $CKEL$ étant un parallélogramme, c'est un rectangle si et seulement si l'angle $\widehat{CKE}$ est un angle droit, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KE}$ sont orthogonaux. Or :

$\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KE}$ sont orthogonaux $\Longleftrightarrow$

3. (c) Le quadrilatère $CKEL$ étant un parallélogramme, c'est un rectangle si et seulement si l'angle $\widehat{CKE}$ est un angle droit, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KE}$ sont orthogonaux. Or :

$$\overrightarrow{KC} \text{ et } \overrightarrow{KE} \text{ sont orthogonaux} \Longleftrightarrow \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = 0$$

3. (c) Le quadrilatère $CKEL$ étant un parallélogramme, c'est un rectangle si et seulement si l'angle $\widehat{CKE}$ est un angle droit, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KE}$ sont orthogonaux. Or :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KC} \text{ et } \overrightarrow{KE} \text{ sont orthogonaux} &\iff \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = 0 \\ &\iff m(m-1) = 0 \quad \textit{(d'après 3.(b))} \end{aligned}$$

3. (c) Le quadrilatère $CKEL$ étant un parallélogramme, c'est un rectangle si et seulement si l'angle $\widehat{CKE}$ est un angle droit, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KE}$ sont orthogonaux. Or :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KC} \text{ et } \overrightarrow{KE} \text{ sont orthogonaux} &\iff \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = 0 \\ &\iff m(m-1) = 0 \quad \textit{(d'après 3.(b))} \\ &\iff m = 0 \quad \text{ou} \quad m = 1\end{aligned}$$

3. (c) Le quadrilatère $CKEL$ étant un parallélogramme, c'est un rectangle si et seulement si l'angle $\widehat{CKE}$ est un angle droit, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KE}$ sont orthogonaux. Or :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KC} \text{ et } \overrightarrow{KE} \text{ sont orthogonaux} &\iff \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = 0 \\ &\iff m(m-1) = 0 \quad \textit{(d'après 3.(b))} \\ &\iff m = 0 \quad \text{ou} \quad m = 1\end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{CKEL \text{ est un rectangle} \iff m = 0 \text{ ou } m = 1}$$

4. (a) On a :

- $CK =$

4. (a) On a :

- $CK = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2}$

4. (a) On a :

- $CK = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

4. (a) On a :

- $CK = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

4. (a) On a :

- $CK = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

- $KE =$

4. (a) On a :

- $CK = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
- $KE = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2}$

4. (a) On a :

- $CK = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
- $KE = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}}$

4. (a) On a :

- $CK = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
- $KE = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

4. (a) On a :

- $CK = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
- $KE = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

On a $CK = KE$

4. (a) On a :

- $CK = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
- $KE = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

On a $CK = KE$ donc $CKEL$ est un parallélogramme qui a deux côtés adjacents de même longueur.

4. (a) On a :

- $CK = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
- $KE = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

On a $CK = KE$ donc $CKEL$ est un parallélogramme qui a deux côtés adjacents de même longueur. On en déduit que :

$$\boxed{CKEL \text{ est un losange}}$$

4. (b) D'une part, d'après la question 3.(b), en prenant $m = \dfrac{1}{2}$, on a :

4. (b) D'une part, d'après la question 3.(b), en prenant $m = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} =$$

4. (b) D'une part, d'après la question 3.(b), en prenant $m = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

4. (b) D'une part, d'après la question 3.(b), en prenant $m = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

4. (b) D'une part, d'après la question 3.(b), en prenant $m = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

D'autre part, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} =$$

4. (b) D'une part, d'après la question 3.(b), en prenant $m = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

D'autre part, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = KC \times KE \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)$$

4. (b) D'une part, d'après la question 3.(b), en prenant $m = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} &= KC \times KE \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\end{aligned}$$

4. (b) D'une part, d'après la question 3.(b), en prenant $m = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} &= KC \times KE \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\\ &= \frac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\end{aligned}$$

4. (b) D'une part, d'après la question 3.(b), en prenant $m = \frac{1}{2}$, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} &= KC \times KE \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\\ &= \frac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right) = -\frac{1}{4}$$

4. (b) D'une part, d'après la question 3.(b), en prenant $m = \frac{1}{2}$, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} &= KC \times KE \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\\ &= \frac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right) = -\frac{1}{4}$$

Soit :

$$\cos\left(\widehat{CKE}\right) = -\frac{1}{5}$$

4. (b) D'une part, d'après la question 3.(b), en prenant $m = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} &= KC \times KE \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\\ &= \frac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right) = -\frac{1}{4}$$

Soit :

$$\cos\left(\widehat{CKE}\right) = -\frac{1}{5}$$

On obtient alors, à l'aide de la calculatrice :

4. (b) D'une part, d'après la question 3.(b), en prenant $m = \frac{1}{2}$, on a :

$$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} &= KC \times KE \times \cos\left(\widehat{CKE}\right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right) \\ &= \frac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right)\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{5}{4} \times \cos\left(\widehat{CKE}\right) = -\frac{1}{4}$$

Soit :

$$\cos\left(\widehat{CKE}\right) = -\frac{1}{5}$$

On obtient alors, à l'aide de la calculatrice :

$$\boxed{\widehat{CKE} \approx 102°}$$