

Exercice 1

Énoncé

(5 points)

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.

On choisit un acheteur au hasard et on considère les événements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

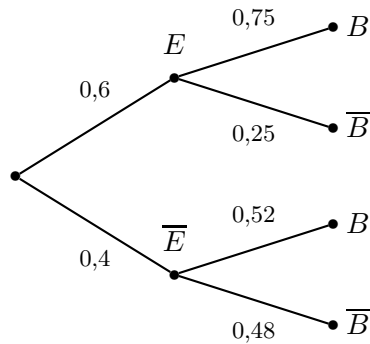
1. Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.

On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(B) = 0,658$.
3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique ?
4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.
 - (a) Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
 - (b) Calculer $P(X = 8)$.
 - (c) Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.
 - (d) Calculer l'espérance de X .
 - (e) La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1 200 €. En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules ?

Correction

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Il s'agit alors de calculer $P(E \cap B)$:

$$\begin{aligned}
 P(E \cap B) &= P(E) \times P_E(B) \\
 &= 0,6 \times 0,75 \\
 &= 0,45
 \end{aligned}$$

La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est donc :

$$P(E \cap B) = 0,45$$

2. Les événements E et $\bar{E}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(E) \times P_E(B) + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(B) \\
 &= 0,6 \times 0,75 + 0,4 \times 0,52 \\
 &= 0,45 + 0,208 \\
 &= 0,658
 \end{aligned}$$

Soit :

$$P(B) = 0,658$$

3. Il s'agit de calculer $P_B(E)$:

$$\begin{aligned}
 P_B(E) &= \frac{P(E \cap B)}{P(B)} \\
 &= \frac{0,45}{0,658} \\
 &\approx 0,684
 \end{aligned}$$

La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique sachant qu'il a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est donc :

$$P_B(E) \approx 0,684$$

- 4.(a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (l'acheteur peut installer une borne de recharge à son domicile) est égale à 0,658. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès donc :

$$X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 20 \text{ et } p = 0,658$$

(b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

$$P(X = 8) \approx 0,011$$

(c) Il s'agit de calculer $P(X \geq 10)$. On obtient alors, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge est :

$$P(X \geq 10) \approx 0,955$$

(d) L'espérance de X est donnée par la formule $E(X) = n \times p = 20 \times 0,658 = 13,16$, soit :

$$E(X) = 13,16$$

(e) En moyenne, lors de la vente de 20 véhicules, il y a en a 13,16 qui ont la possibilité d'installer une borne de recharge. On a alors $13,16 \times 1\,200 = 15\,792$. Pour la vente de 20 véhicules, la directrice devra donc prévoir d'engager, en moyenne, la somme de :

$$15\,792 \text{ €}$$

Commentaires

- Dans la question 4b, on peut détailler le calcul :

$$P(X = 8) = \binom{20}{8} \times 0,658^8 \times (1 - 0,658)^{12}$$

Exercice 2

Énoncé

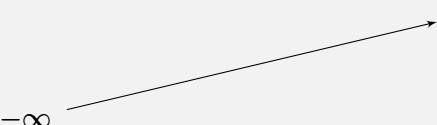
(6 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.

Affirmation A : La fonction f admet pour tableau de variations le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$+\infty$



Affirmation B : L'équation $f(x) = -2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

- Affirmation C :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

- On considère la fonction k définie et continue sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = 1 + 2e^{-x^2+1}$$

Affirmation D : Il existe une primitive de la fonction k décroissante sur $\mathbb{R}$.

- On considère l'équation différentielle $(E) : 3y' + y = 1$.

Affirmation E : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4e^{-\frac{1}{3}x} + 1$$

est solution de l'équation différentielle (E) avec $g(0) = 5$.

5. **Affirmation F** : Une intégration par parties permet d'obtenir :

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}$$

Correction

1. Affirmation A : Vrai

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = e^x + 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

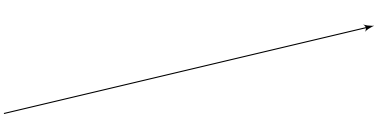
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{cases}$$

Et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

On a donc bien le tableau :

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$+\infty$



Affirmation B : Faux

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Or $-2 \in]-\infty; +\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2. Affirmation C : Vrai

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} &= \frac{x^2 \left(\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2} \right)}{3x^2} \\ &= \frac{\frac{\ln(x)}{x^2} - 1 + \frac{2}{x^2}}{3} \end{aligned}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ et, par croissance comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

3. Affirmation D : Faux

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{-x^2+1} > 0$ donc $k'(x) > 0$. Soit K une primitive de k alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $K'(x) = k(x) > 0$. Donc la fonction K est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Affirmation E : Vrai

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4e^{-\frac{1}{3}x} + 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = -\frac{4}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} 3g'(x) + g(x) &= 3 \times \left(-\frac{4}{3}e^{-\frac{1}{3}x}\right) + 4e^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\ &= -4e^{-\frac{1}{3}x} + 4e^{-\frac{1}{3}x} + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Et comme $g(0) = 4 + 1 = 5$, g est la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $g(0) = 5$.

5. Affirmation F : Vrai

Pour tout $x \in [0; 1]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{-x} dx &= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 \\ &= -e^{-1} - e^{-1} + 1 \\ &= 1 - 2e^{-1} \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_0^1 xe^{-x} dx = 1 - 2e^{-1}$$

Commentaires

- Dans la question 4, on aurait également pu résoudre l'équation différentielle de manière classique : ensemble des solutions de l'équation homogène associée, solution particulière, ensemble des solutions de l'équation de départ, solution vérifiant une condition initiale.

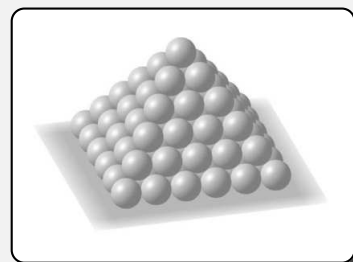
Exercice 3

Énoncé

(4 points)

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1^{er} étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2^e étage, niveau juste en-dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3^e étage possède 9 boules ;
- ...
- le n -ième étage possède n^2 boules.



Pour tout entier $n \geq 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n -ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.
2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
 - (a) Calculer S_5 et interpréter ce résultat.
 - (b) On considère la fonction `pyramide` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python. Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n , l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1,n+1) :
        S = ...
    return ...
```

- (c) Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

- (d) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible ?

Correction

1. Le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages est :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

Soit :

30 boules

- 2.(a) On a $S_5 = S_4 + 5^2 = 30 + 25 = 55$. On en déduit que le nombre total de boules d'une pyramide de 5 étages est :

$S_5 = 55$

- (b) On peut compléter le programme de la façon suivante :

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1,n+1) :
        S = S + i**2
    return S
```

(c) Pour tout entier naturel n , on a d'une part :

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n^2+n)(2n+1) + 6(n^2+2n+1)}{6} \\ &= \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + 6n^2 + 9n + 4n + 6}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}}$$

(d) Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

• **Initialisation :**

Pour $n = 1$, on a d'une part $S_1 = 1$ et d'autre part $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. La propriété est donc vraie au rang 1.

• **Hérédité :**

Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geq 1$, c'est-à-dire $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \quad (\text{d'après 2c}) \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

• **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit :

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

3. On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $S_7 = 140 \leq 200$
- $S_8 = 204 > 200$

Le marchand peut donc construire 7 étages en utilisant :

$$\boxed{140 \text{ oranges}}$$

Commentaires

- Dans la question 2c, on aurait pu partir de l'expression et dérouler les calculs jusqu'à obtenir l'autre expression mais il aurait alors fallu factoriser. Dans ce cas je trouve plus simple de rédiger avec un « d'une part ..., d'autre part ».

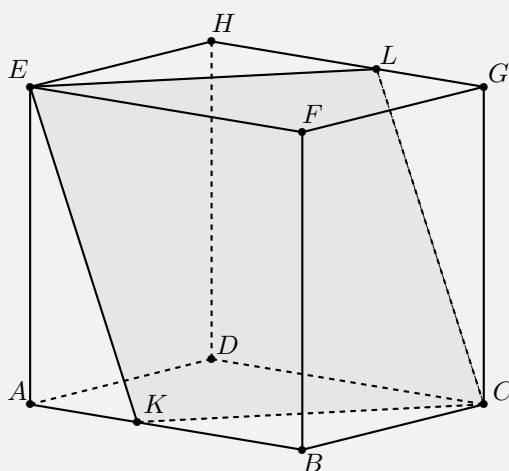
Exercice 4

Énoncé

(5 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$ et l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K(m; 0; 0) \quad \text{et} \quad L(1-m; 1; 1)$$



- Donner les coordonnées des points E et C dans ce repère.
 - Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point $L(1; 1; 1)$ est confondu avec le point G , le point $K(0; 0; 0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA) .
 - Justifier que le vecteur $\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (GEA) .
 - Déterminer une équation cartésienne du plan (GEA) .
- On s'intéresse désormais à la nature de $CKEL$ en fonction du paramètre m .
- Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0; 1]$.
 - Démontrer que $CKEL$ est un parallélogramme.
 - Justifier que $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = m(m-1)$.
 - Démontrer que $CKEL$ est un rectangle si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$.
 - Dans cette question, $m = \frac{1}{2}$. Ainsi, L a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; 1; 1)$ et K a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; 0; 0)$.
 - Démontrer que le parallélogramme $CKEL$ est alors un losange.
 - À l'aide de la question 3b, déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{CKE}$.

Correction

1. On a :

$$\boxed{E(0; 0; 1)} \quad \text{et} \quad \boxed{C(1; 1; 0)}$$

2.(a) On a $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AE} = 1 \times 0 - 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$
- $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AG} = 1 \times 1 - 1 \times 1 + 0 \times 1 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{DB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (GEA) , on en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{DB} \text{ est normal au plan } (GEA)}$$

(b) D'après la question précédente, le plan (GEA) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $A(0; 0; 0)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation, d'où $0 - 0 + d = 0$, soit $d = 0$. Le plan (GEA) admet donc pour équation :

$$\boxed{x - y = 0}$$

3.(a) On a $\overrightarrow{CK} \begin{pmatrix} m-1 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CK} \begin{pmatrix} m-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{LE} \begin{pmatrix} 0-(1-m) \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{LE} \begin{pmatrix} m-1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{LE}$, on en déduit que :

$$\boxed{CKEL \text{ est un parallélogramme}}$$

(b) On a $\overrightarrow{KC} \begin{pmatrix} 1-m \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KE} \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où :

$$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = (1-m) \times (-m) + 1 \times 0 + 0 \times 1$$

Soit :

$$\boxed{\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = m(m-1)}$$

(c) Le quadrilatère $CKEL$ étant un parallélogramme, c'est un rectangle si et seulement si l'angle $\widehat{CKE}$ est un angle droit, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{KE}$ sont orthogonaux. Or :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KC} \text{ et } \overrightarrow{KE} \text{ sont orthogonaux} &\iff \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = 0 \\ &\iff m(m-1) = 0 \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &\iff m = 0 \quad \text{ou} \quad m = 1 \end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{CKEL \text{ est un rectangle} \iff m = 0 \text{ ou } m = 1}$$

4.(a) On a :

$$\bullet CK = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\bullet KE = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

On a $CK = KE$ donc $CKEL$ est un parallélogramme qui a deux côtés adjacents de même longueur. On en déduit que :

$CKEL$ est un losange

(b) D'une part, d'après la question 3b, en prenant $m = \frac{1}{2}$, on a :

$$\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} &= KC \times KE \times \cos(\widehat{CKE}) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos(\widehat{CKE}) \\ &= \frac{5}{4} \times \cos(\widehat{CKE}) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{5}{4} \times \cos(\widehat{CKE}) = \frac{1}{4}$$

Soit :

$$\cos(\widehat{CKE}) = \frac{1}{5}$$

On obtient alors, à l'aide de la calculatrice :

$$\widehat{CKE} \approx 78^\circ$$

Commentaires

- Il existe d'autres méthodes pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme. On peut par exemple montrer que les diagonales se coupent en leur milieu.
- Il existe d'autres méthodes pour montrer qu'un parallélogramme est un losange. On peut par exemple montrer que les diagonales sont perpendiculaires.
- Dans la question 4b, afin de déterminer une mesure de l'angle connaissant son cosinus, on utilise la touche $\cos^{-1}$ ou arccos de la calculatrice. On fera bien attention d'être en mode « degrés ».