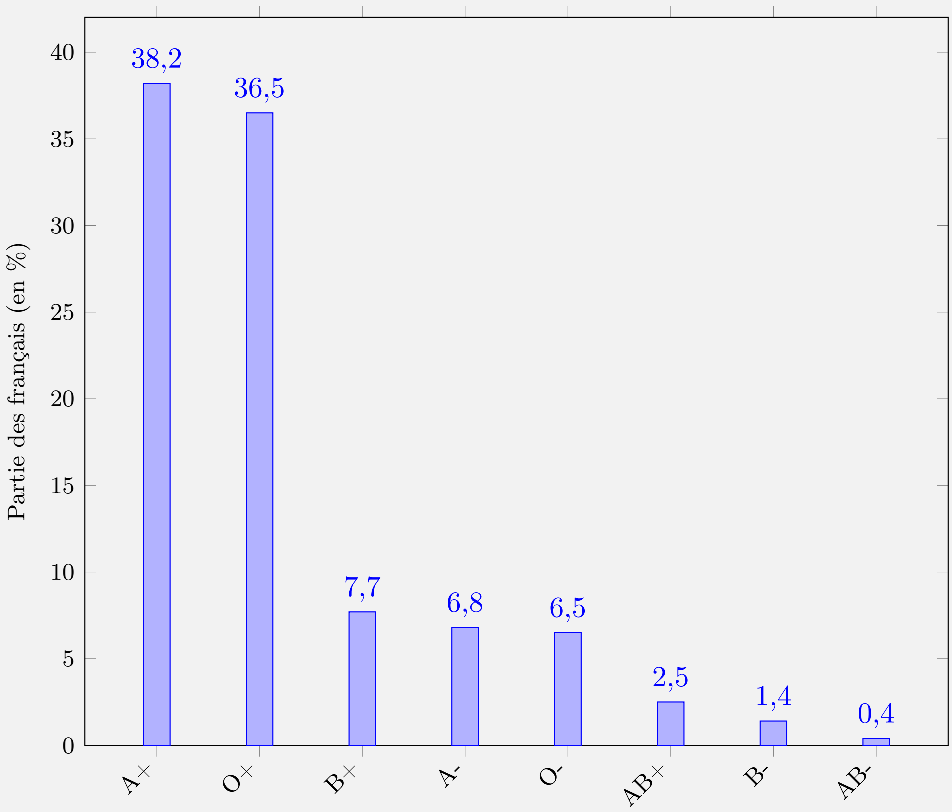
ANNÉE 2024 - SUJET CORRIGÉ 17

AMÉRIQUE DU SUD - 21 NOVEMBRE 2024

Exercice 1

Énoncé **(5 points)**

Voici la répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :



Source : https ://statista.com/statistiques/656036/groupes-sanguins-repartition-rh-france/

A+, O+, B+, A-, O-, AB+, B- et AB- sont les différents groupes sanguins combinés aux rhésus.
Par exemple : A+ est le groupe sanguin A de rhésus +.
Une expérience aléatoire consiste à choisir une personne au hasard dans la population française et à déterminer son groupe sanguin et son rhésus.
Dans l'exercice, on adopte les notations du type :

- $A+$ est l'événement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus + »
- $A-$ est l'événement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus - »
- A est l'événement « la personne est de groupe sanguin A »

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On note $Rh+$ l'événement « La personne est de rhésus positif ».

1. Justifier que la probabilité que la personne choisie soit de rhésus positif est égale à 0,849.
2. Démontrer à l'aide des données de l'énoncé que $P_{Rh+}(A) = 0{,}450$ à 0,001 près.
3. Une personne se souvient que son groupe sanguin est AB mais a oublié son rhésus. Quelle est la probabilité que son rhésus soit négatif ? Arrondir le résultat à 0,001 près.

Partie 2

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 0,001 près.

Un donneur universel de sang est une personne de groupe sanguin O et de rhésus négatif. On rappelle que 6,5 % de la population est de groupe O-.

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.
   (a) Déterminer la probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels. Justifier votre réponse.
   (b) On considère la fonction ci-dessous nommée `proba` d'argument `k` écrite en langage Python.

```
def proba(k) :
    p = 0
    for i in range(k+1) :
        p = p + binomiale(i,50,0.065)
    return p
```

   Cette fonction utilise la fonction `binomiale` d'arguments `i`, `n` et `p`, créée pour l'occasion, qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   Déterminer la valeur numérique renvoyée par la fonction `proba` lorsqu'on saisit `proba(8)` dans la console Python. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Quel est le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999.

Correction

Partie 1

1. Le pourcentage de personnes de rhésus positif est égale à $38{,}2+36{,}5+7{,}7+2{,}5 = 84{,}9$. La proportion de personnes de rhésus positif est donc égale à 0,849 donc la probabilité que la personne choisie soit de rhésus positif est :
$$\boxed{P(Rh+) = 0{,}849}$$
2. On a :
$$\begin{aligned} P_{Rh+}(A) &= \frac{P(A \cap Rh+)}{P(Rh+)} \\ &= \frac{P(A+)}{P(Rh+)} \\ &= \frac{0{,}382}{0{,}849} \\ &\approx 0{,}450 \end{aligned}$$
La probabilité que la personne soit du groupe A sachant qu'elle est de rhésus positif est donc :
$$\boxed{P_{Rh+}(A) = 0{,}450}$$

3. Il s'agit de calculer $P_{AB}(Rh-)$:

$$\begin{aligned}
P_{AB}(Rh-) &= \frac{P(AB \cap Rh-)}{P(AB)} \\
&= \frac{P(AB-)}{P(AB)} \\
&= \frac{0{,}004}{0{,}029} \quad \textit{(car } P(AB) = P(AB+) + P(AB-)\textit{)} \\
&\approx 0{,}138
\end{aligned}$$

La probabilité que son rhésus soit négatif sachant que la personne est du groupe AB est donc :

$$\boxed{P_{AB}(Rh-) \approx 0{,}138}$$

Partie 2

1.(a) On répète 50 fois une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (la personne est un donneur universel) est égale à 0,065. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}065$.
On obtient alors, à l'aide de la calculatrice que la probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels est :

$$\boxed{P(X = 8) \approx 0{,}010}$$

(b) La commande `proba(k)` renvoie la somme, pour i variant entre 0 et k, des probabilités $P(X = i)$. Elle renvoit donc la valeur de $P(X \leqslant k)$. La commande `proba(8)` renvoie donc la probabilité que parmi les 50 personnes, au plus 8 soient des donneurs universels, soit :

$$\boxed{P(X \leqslant 8) \approx 0{,}995}$$

2. On choisit n personnes dans la population française et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de donneurs universels parmi ces n personnes. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}065$. La probabilité qu'aucune personne de l'échantillon ne soit donneur universel est $P(Y = 0) = (1 - 0{,}065)^n = 0{,}935^n$. Par passage à l'événement contraire, la probabilité qu'au moins une personne soit donneur universel est :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}935^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}999 &\iff 1 - 0{,}935^n \geqslant 0{,}999 \\
&\iff 0{,}935^n \leqslant 0{,}001 \\
&\iff \ln\left(0{,}935^n\right) \leqslant \ln(0{,}001) \\
&\iff n\ln(0{,}935) \leqslant \ln(0{,}001) \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}935)} \quad \textit{(car } \ln(0{,}935) < 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}935)} \approx 102{,}8$. Le nombre minimal de personnes à choisir pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel soit supérieure à 0,999 est donc :

$$\boxed{n = 103}$$

Commentaires

- Dans la question 1a, on peut, soit utiliser directement la fonction da la calculatrice calculant les probabilités dans le cas d'une loi binimiale donnée, soit appliquer la formule :

$$P(X=8)=\binom{50}{8}\times 0{,}065^8\times 0{,}935^{42}$$

Exercice 2

Énoncé **(5 points)**

Cet exercice contient 5 affirmations.
Pour chaque affirmation, répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.
Toute absence de justification ou justification incorrecte ne sera pas prise en compte dans la notation.

Partie 1
On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$.

1. **Affirmation 1 :** La suite (u_n) est décroissante minorée par 0.
2. **Affirmation 2 :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. **Affirmation 3 :** La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$ est géométrique.

Partie 2
On considère l'équation différentielle (E) : $y'=\frac{3}{2}y+2$ d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **Affirmation 4 :** Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).
2. Dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f solution de (E) tel que $f(0)=0$.
   Affirmation 5 : La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}_f$ a pour coefficient directeur $2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.

Correction
Partie 1

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Démontrons par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n=0$, on a $u_0=10$ et $u_1=\frac{1}{3}\times 10+2=\frac{16}{3}\approx 5{,}33$. On a donc bien $0\leqslant u_1\leqslant u_0$ et la propriété est vraie au rang $n=0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire :
     $$0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$$
     On a alors, en multipliant par $\frac{1}{3}$:
     $$0\leqslant \frac{1}{3}u_{n+1}\leqslant \frac{1}{3}u_n$$
     Puis, en ajoutant 2 :
     $$2\leqslant \frac{1}{3}u_{n+1}+2\leqslant \frac{1}{3}u_n+2$$

Soit :

$$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

Et donc a fortiori :

$$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion :**
  La propriété est vraie pour $n=0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

  Cela prouve que la suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) et minorée par 0 (car $0 \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

2. **Affirmation 2 : Faux**
   La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle converge vers une limite l. Et comme la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 2$ et que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Or :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{1}{3}x + 2 = x \\ &\iff \frac{2}{3}x = 2 \\ &\iff x = 2 \times \frac{3}{2} \\ &\iff x = 3 \end{aligned}$$

   La fonction f admet donc 3 pour unique point fixe, on en déduit que $l = 3$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

3. **Affirmation 3 : Vrai**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{3}\left(u_n - 3\right) \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

Partie 2

1. **Affirmation 4 : Vrai**
   Soit $k \in \mathbb{R}$ et f la fonction constante définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = k$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ et donc :

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{3}{2}f(x) + 2 &\iff 0 = \frac{3}{2}k + 2 \\ &\iff \frac{3}{2}k = -2 \\ &\iff k = -2 \times \frac{2}{3} \\ &\iff k = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

La fonction constante $x \mapsto -\dfrac{4}{3}$ est donc solution de (E).

2. **Affirmation 5 :**

- L'équation homogène associée $y' = \dfrac{3}{2}y$ admet pour solutions les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- On a vue, dans la question précédente, que l'équation différentielle (E) admettait pour solution particulière la fonction :

$$x \mapsto -\frac{4}{3}$$

- Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- Soit alors f la solution qui vérifie $f(0) = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - \dfrac{4}{3}$ et donc $f(0) = \lambda - \dfrac{4}{3}$. On a alors :

$$f(0) = 0 \Longleftrightarrow \lambda - \frac{4}{3} = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

On a donc :

$$f(x) = \frac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - \frac{4}{3}$$

- On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} = 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$$

Et donc :

$$f'(1) = 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}\times 1} = 2\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$$

Et le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est égal au nombre dérivé de f en 1.

Commentaires

- Dans la question 3 de la partie 1, pour montrer que la suite (v_n) est géométrique, on peut également remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3$ donc $u_n = v_n + 3$. On peut alors « dérouler » le calcul de la façon suivante :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 \\ &= \frac{1}{3}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{3}(v_n + 3) - 1 \\ &= \frac{1}{3}v_n + 1 - 1 \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

Exercice 3

Énoncé **(5 points)**

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 4)\mathrm{e}^{-x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de le fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)\mathrm{e}^{-x}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^2 - 1$.
2. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n$$

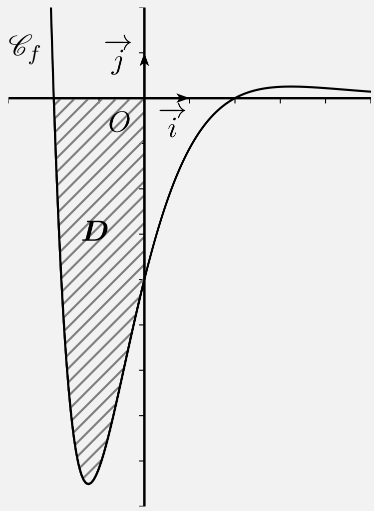
3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
2. On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

   Le domaine $\boldsymbol{D}$ du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

   Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S su domaine $\boldsymbol{D}$.



Correction

Partie 1

1. • **Limite en $-\infty$:**

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 4) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty \end{cases}$$

• **Limite en $+\infty$:**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} - 4\mathrm{e}^{-x}$ d'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0 & \textit{(par croissances comparées)} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} 4\mathrm{e}^{-x} = 0 \end{cases}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \times \mathrm{e}^{-x} + (x^2 - 4) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (-x^2 + 2x + 4)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)\mathrm{e}^{-x}}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 2x + 4$. Il s'agit d'un polynôme du second degré qui admet deux racines : $1 - \sqrt{5}$ et $1 + \sqrt{5}$. Et il est négatif à l'extérieur de l'intervalle des racines, d'où le tableau :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(1-\sqrt{5})$	$\nearrow$	$f(1+\sqrt{5})$	$\searrow$	0

Partie 2

1. On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{0} \\ &= -\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-(-2)} \\ &= \mathrm{e}^2 - 1 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{I_0 = \mathrm{e}^2 - 1}$$

2. On a $I_{n+1} = \displaystyle\int_{-2}^{0} x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Posons alors, pour tout $x \in [-2\,;\,0]$:

$$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \Big[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -(n+1)x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)\int_{-2}^{0} x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n}$$

3. On calcule alors, de proche en proche :

$$I_1 = (-2)^1 \mathrm{e}^2 + I_0 = -2\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^2 - 1 = -\mathrm{e}^2 - 1$$

Et :

$$I_2 = (-2)^2 \mathrm{e}^2 + 2I_1 = 4\mathrm{e}^2 + 2(-\mathrm{e}^2 - 1) = 2\mathrm{e}^2 - 2$$

Soit :

$$\boxed{I_1 = -\mathrm{e}^2 - 1} \quad \text{et} \quad \boxed{I_2 = 2\mathrm{e}^2 - 2}$$

Partie 3

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $x^2 - 4$. Il s'agit d'un polynôme du second degré qui admet -2 et 2 pour racines et qui est positif à l'extérieur de l'intervalle des racines. On en déduit le tableau :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. La fonction f étant négative entre -2 et 0, il s'agit de calculer la valeur opposée de l'intégrale $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$. Or :

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{0} (x^2 - 4)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{0} x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - 4\int_{-2}^{0} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= I_2 - 4I_0 \\
&= 2\mathrm{e}^2 - 2 - 4(\mathrm{e}^2 - 1) \\
&= 2\mathrm{e}^2 - 2 - 4\mathrm{e}^2 + 4 \\
&= -2\mathrm{e}^2 + 2 \\
&= -2(\mathrm{e}^2 - 1)
\end{aligned}$$

La valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S su domaine $\boldsymbol{D}$ est donc :

$$\boxed{-\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = 2(\mathrm{e}^2 - 1)}$$

Commentaires

- Dans la question 1, pour la limite en $+\infty$, on utilise la formule de croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$$

Ce n'est pas exactement la formule du cours qui est :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$$

Si l'on veut être vraiment rigoureux et se ramener à la formule du cours, on peut écrire, pour tout $x \neq 0$:

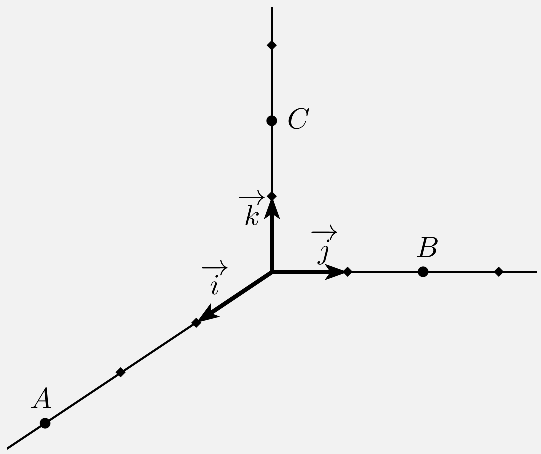
$$\frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}}$$

Et ainsi, comme le dénominateur tend vers $+\infty$, le quotient tend vers 0.

Exercice 4

Énoncé **(5 points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,;\,\overrightarrow{k})$.
On considère les trois points $A(3\,;\,0\,;\,0)$, $B(0\,;\,2\,;\,0)$ et $C(0\,;\,0\,;\,2)$.



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :
« Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des 3 autres faces du tétraèdre $OABC$ ».

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(2\,;\,3\,;\,3)$ est normal au plan (ABC).
2. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + 3y + 3z - 6 = 0$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$.
4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC). Déterminer les coordonnées du point H.
5. En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à $\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Démontrer que le volume du tétraèdre $OABC$ est égal à 2.
2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{22}$.
3. Démontrer que pour le tétraèdre $OABC$, *« le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des 3 autres faces du tétreèdre ». On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \dfrac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.*

Correction

Partie 1

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ d'où :
   - $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times -3 + 3\times 2 + 3\times 0 = -6+6 = 0$
   - $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times -3 + 3\times 0 + 3\times 2 = -6+6 = 0$

   Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), on en déduit que :

   $$\boxed{\text{Le vecteur } \vec{n} \text{ est normal au plan } (ABC)}$$

2. Le plan (ABC) admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal, il admet une équation cartésienne de la forme :

   $$2x+3y+3z+d=0 \quad \text{avec } d\in\mathbb{R}$$

   De plus, le point A appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, soit $2\times 3+3\times 0+3\times 0+d=0$ et donc $d=-6$. Une équation du plan (ABC) est donc :

   $$\boxed{2x+3y+3z-6=0}$$

3. La droite d passe par $O(0\,;\,0\,;\,0)$ et admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur, elle admet donc pour représentation paramétrique :

   $$\boxed{\begin{cases} x=2t \\ y=3t \\ z=3t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}}$$

4. On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de d dans l'équation cartésienne du plan (ABC) :

   $$\begin{aligned} 2\times 2t+3\times 3t+3\times 3t-6=0 &\iff 4t+9t+9t-6=0 \\ &\iff 22t=6 \\ &\iff t=\frac{3}{11} \end{aligned}$$

   Le point H est donc le point de paramètre $t=\dfrac{3}{11}$ dans la représentation paramétrique de d, soit :

   $$\boxed{H\left(\frac{6}{11}\,;\,\frac{9}{11}\,;\,\frac{9}{11}\right)}$$

5. Le point H étant le point d'intersection du plan (ABC) avec la droite passant par O perpendiculairement à ce plan, il s'agit du projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC). La distance du point O au plan (ABC) est donc la distance OH.

   $$\begin{aligned} OH &= \sqrt{\left(\frac{6}{11}\right)^2+\left(\frac{9}{11}\right)^2+\left(\frac{6}{11}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{6^2+9^2+9^2}{11^2}} \\ &= \frac{\sqrt{198}}{11} \\ &= \frac{3\sqrt{22}}{11} \end{aligned}$$

La distance du point O au plan (ABC) est donc :

$$\boxed{\frac{3\sqrt{22}}{11}}$$

Partie 2

1. Pour calculer le volume $\mathscr{V}$ du tétraèdre $OABC$, on peut choisir pour base la face OAB, la hauteur correspondante est alors OC. L'aire de la base OAB est alors :

$$\mathscr{A}_{OAB} = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

On a alors :

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{OAB} \times OC = \frac{1}{3} \times 3 \times 2 = 2$$

Le volume du tétraèdre $OABC$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{V} = 2}$$

2. Dans le tétraèdre $0ABC$, si on choisit ABC pour base alors la hauteur correspondante est OH et, en notant $\mathscr{A}_{OAB}$ l'aire du triangle ABC, le volume est donné par la formule :

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times OH = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times \frac{3\sqrt{22}}{11} = \frac{\sqrt{22}}{11}\mathscr{A}_{ABC}$$

Et comme, d'après la question précédente, ce volume est égal à 2, on a :

$$\frac{\sqrt{22}}{11}\mathscr{A}_{ABC} = 2$$

D'où :

$$\mathscr{A}_{ABC} = 2 \times \frac{11}{\sqrt{22}} = \frac{22}{\sqrt{22}} = \sqrt{22}$$

L'aire du triangle ABC est donc :

$$\boxed{\mathscr{A}_{ABC} = \sqrt{22}}$$

3. Les aires des faces OAB, OAC et OBC sont respectivement :

$$\mathscr{A}_{OAB} = 3 \qquad \mathscr{A}_{OAC} = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \qquad \mathscr{A}_{OBC} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

On a alors d'une part :

$$\mathscr{A}^2_{ABC} = \sqrt{22}^2 = 22$$

Et d'autre part :

$$\mathscr{A}^2_{OAB} + \mathscr{A}^2_{OAC} + \mathscr{A}^2_{OBC} = 3^2 + 3^2 + 2^2 = 9 + 9 + 4 = 22$$

On a donc bien :

$$\boxed{\mathscr{A}^2_{ABC} = \mathscr{A}^2_{OAB} + \mathscr{A}^2_{OAC} + \mathscr{A}^2_{OBC}}$$

Commentaires

- Dans la question 2, juste une petite simplification que je n'ai pas détaillée :

$$\frac{22}{\sqrt{22}} = \frac{\sqrt{22}^2}{\sqrt{22}} = \sqrt{22}$$