ANNÉE 2024 - SUJET 16

AMÉRIQUE DU SUD - 20 NOVEMBRE 2024

Exercice 1

Énoncé **(5 points)**

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + \dfrac{1}{4}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + \dfrac{1}{4}y = 0$, d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (20x + 8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. De plus, on admet que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. (a) Justifier que, pour tout réel x positif, $f'(x) = (18 - 5x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.
   (a) Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[14\,;\,15]$.

(b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` ci-contre, écrite en langage Python.

a	14				
b	15				
$b-a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m)>8$	FAUX				

```python
from math import exp
def f(x) :
   return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation() :
   a,b = 14,15
   while b-a > 0.1 :
      m = (a+b)/2
      if f(m) > 8 :
         a = m
      else :
         b = m
   return a,b
```

(c) Quel est l'objectif de la fonction `solution_equation` dans le contexte de la question ?

Exercice 2

Énoncé **(6 points)**

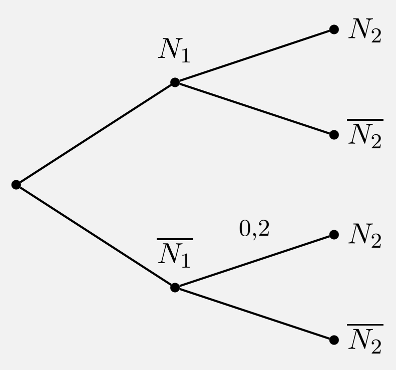
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.
L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.
On considère l'expérience aléatoire suivante : on pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2, puis on pioche au hasard une boule dans U_2.
On note :

1. N_1 l'événement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
2. N_2 l'événement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

Pour tout événement A, on note $\overline{A}$ son événement contraire.

Partie A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.
   (a) Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1, est 0,2.
   (b) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des événements concernés, sous forme décimale.



2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2.
3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.
4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2. Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1. On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2}.

Partie B
n désigne un entier naturel non nul.
L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.
On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X. Justifier votre réponse.
2. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que : $1 - 0{,}72^n \geqslant 0{,}9$.
3. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

Partie C
Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2.
On considère la nouvelle expérience suivante : on pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?
3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse. *On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.*

Exercice 3

Énoncé **(4 points)**

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes et justifier votre réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans la notation. Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{25 + (-1)^n}{n}$.
   Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \dfrac{w_n}{1 + w_n} \end{cases}$.
   On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$.
   On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \dfrac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.
   Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \ln(1 + v_n) \end{cases}$.
   On admet que pour tout entier naturel n, $v_n > 0$.

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n \,\mathrm{d}x$.

   Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$.

Exercice 4

Énoncé **(5 points)**

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droite non coplanaires..
Par définition, la distance entre deux droite non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment $[EF]$, où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et à (d_2).
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,,\,\overrightarrow{k}\,)$.

Soit (d_1), la droite passant par $A(1\,;\,2\,;\,-1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1).
2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x + y + 5z + 5 = 0$.
4. (a) Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

   (b) On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$. Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0\,;\,-\dfrac{5}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{4}{3}\,;\,-1\right)$.

5. (a) Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

   (b) Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).