

Exercice 1

Énoncé

(5 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + \frac{1}{4}y = 20e^{-\frac{1}{4}x}$, d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
2. On considère l'équation différentielle $(E') : y' + \frac{1}{4}y = 0$, d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') .
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}$. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0; +\infty[$. De plus, on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- 1.(a) Justifier que, pour tout réel x positif, $f'(x) = (18 - 5x)e^{-\frac{1}{4}x}$.
(b) En déduire le tableau de variations de la fonction f . On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.
(a) Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[14; 15]$.

- (b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` ci-contre, écrite en langage Python.

a	14				
b	15				
$b - a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	FAUX				

```
from math import exp
def f(x) :
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation() :
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8 :
            a = m
        else :
            b = m
    return a,b
```

- (c) Quel est l'objectif de la fonction `solution_equation` dans le contexte de la question ?

Correction

Partie A

1. La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= ae^{-\frac{1}{4}x} + ax \times \left(-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}\right) \\ &= ae^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{4}axe^{-\frac{1}{4}x} \\ &= \left(a - \frac{1}{4}ax\right)e^{-\frac{1}{4}x} \end{aligned}$$

Et donc :

$$g'(x) + \frac{1}{4}g(x) = \left(a - \frac{1}{4}ax\right)e^{-\frac{1}{4}x} + \frac{1}{4}axe^{-\frac{1}{4}x} = ae^{-\frac{1}{4}x}$$

La condition pour que g soit solution de (E) est donc :

$$\boxed{a = 20}$$

2. Les solutions de l'équation différentielle (E') sont les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{4}x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

3. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto 20xe^{-\frac{1}{4}x} + \lambda e^{-\frac{1}{4}x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Soit :

$$\boxed{x \mapsto (20x + \lambda)e^{-\frac{1}{4}x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

4. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, posons $f(x) = (20x + \lambda)e^{-\frac{1}{4}x}$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(0) &= 8 \iff (20 \times 0 + \lambda)e^0 = 8 \\ &\iff \lambda = 8 \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$\boxed{f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}}$$

Partie B

- 1.(a) On a vu que la fonction f était solution de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{4}y = 20e^{-\frac{1}{4}x}$, on a donc, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{4}f(x) + 20e^{-\frac{1}{4}x} = (-5x - 2 + 20)e^{-\frac{1}{4}x} = (18 - 5x)e^{-\frac{1}{4}x}$$

Soit :

$$f'(x) = (18 - 5x)e^{-\frac{1}{4}x}$$

- (b) Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $e^{-\frac{1}{4}x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $18 - 5x$ d'où le tableau :

x	0	$\frac{18}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	8	$f\left(\frac{18}{5}\right)$	0

Avec $f\left(\frac{18}{5}\right) = \left(20 \times \frac{18}{5} + 8\right)e^{-\frac{1}{4} \times \frac{18}{5}} = 80e^{-0,9}$. Le maximum de f est donc atteint en $\frac{18}{5}$ et vaut :

$$f\left(\frac{18}{5}\right) = 80e^{-0,9}$$

- 2.(a) Sur l'intervalle $[14; 15]$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus $f(14) \approx 8,7 > 8$ et $f(15) \approx 7,2 < 8$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[14; 15]$.

- (b) On obtient :

a	14	14	14,25	14,375	14,4375
b	15	14,5	14,5	14,5	14,5
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	14,5	14,25	14,375	14,4375	
Condition $f(m) > 8$	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	

- (c) La fonction `solution_equation` donne un encadrement d'amplitude inférieur à 0,1 de α . Ainsi on a :

$$14,4375 < \alpha < 14,5$$

Commentaires

- L'algorithme utilisé dans la question 2b est un algorithme de dichotomie qui consiste à partager l'intervalle contenant la solution en deux intervalles, à ne garder que celui qui contient la solution puis à recommencer. C'est ce que l'on fait assez naturellement quand on nous dit « Devine à quel nombre je pense entre 0 et 1 000 et je te dis plus ou moins »...

Exercice 2

Énoncé

(6 points)

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.

L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.

On considère l'expérience aléatoire suivante : on pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans U_2 .

On note :

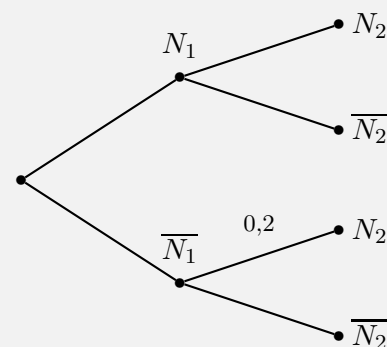
1. N_1 l'événement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
2. N_2 l'événement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

Pour tout événement A , on note $\bar{A}$ son événement contraire.

Partie A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.

- (a) Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 , est 0,2.
- (b) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des événements concernés, sous forme décimale.



2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 .
3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.
4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2 . Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 . On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2} .

Partie B

n désigne un entier naturel non nul.

L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 , entre chaque expérience.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2 .

On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X . Justifier votre réponse.
2. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que : $1 - 0,72^n \geq 0,9$.
3. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

Partie C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2 .

On considère la nouvelle expérience suivante : on pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2 , puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2 .

1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?
3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse. *On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.*

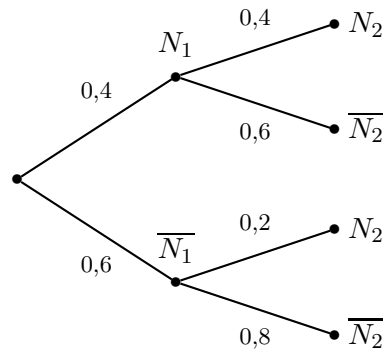
Correction

Partie A

- 1.(a) Après avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 , on place cette boule dans l'urne U_2 . Il y a alors 1 boule noire et 4 boules blanches dans l'urne U_2 . La probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 est donc égale à $\frac{1}{5} = 0,2$. Ainsi la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1 est :

$$P_{\overline{N_1}}(N_2) = 0,2$$

- (b) On obtient les autres probabilités à l'aide d'un raisonnement similaire et on obtient l'arbre :



2. Il s'agit de calculer $P(N_1 \cap N_2)$:

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2 est donc :

$$P(N_1 \cap N_2) = 0,16$$

3. Les événements N_1 et N_2 forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(N_2) &= P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) + P(\overline{N_1}) \times P_{\overline{N_1}}(N_2) \\
 &= 0,4 \times 0,4 + 0,6 \times 0,2 \\
 &= 0,16 + 0,12 \\
 &= 0,28
 \end{aligned}$$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est donc :

$$P(N_2) = 0,28$$

4. Il s'agit de calculer $P_{N_2}(\overline{N_1})$:

$$\begin{aligned}
 P_{N_2}(\overline{N_1}) &= \frac{P(\overline{N_1} \cap N_2)}{P(N_2)} \\
 &= \frac{0,12}{0,28} \\
 &\approx 0,43
 \end{aligned}$$

La probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1 sachant qu'on a pioché une boule noire dans l'urne U_2 est donc :

$$P_{N_2}(\overline{N_1}) \approx 0,43$$

Partie B

- On répète n fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (piocher une boule noire) est $p = 0,28$. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès donc :

$$X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p = 0,28$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} 1 - 0,72^n &\geq 0,9 \iff 0,72^n \leq 0,1 \\ &\iff \ln(0,72^n) \leq \ln(0,1) \\ &\iff n \ln(0,72) \leq \ln(0,1) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,72)} \quad (\text{car } \ln(0,72) < 0) \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,72)} \approx 7,01$ donc le plus petit entier naturel n tel que $1 - 0,72^n \geq 0,9$ est :

$$n = 8$$

- L'expression $1 - 0,72^n$ correspond à la probabilité d'obtenir au moins une boule noire piochées dans l'urne U_2 . En effet cette probabilité est :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,72^n$$

Ainsi, à partir de $n = 8$, on est sûr à au moins 90 % d'avoir obtenu au moins une boule noire.

Partie C

- Il s'agit de déterminer le nombre de choix possibles de 2 boules parmi 10, le nombre de tirages possibles de 2 boules simultanément dans l'urne U_1 est donc :

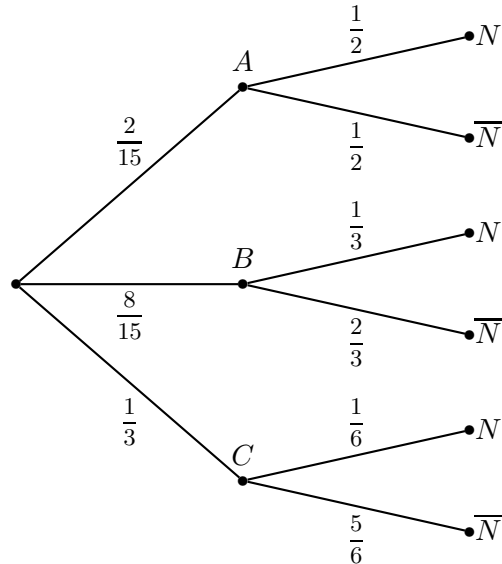
$$\binom{10}{2} = 45$$

- Le nombre de possibilités pour le choix de la boule blanche et $\binom{6}{1} = 6$ et le nombre de possibilités pour le choix de la boule noire et $\binom{4}{1} = 4$. Le nombre de tirages possibles de 2 boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire est donc :

$$\binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = 24$$

- Il y a trois possibilités pour le tirage des deux boules dans l'urne U_1 . Considérons les événements :
 - A : « Piocher deux boules noires dans l'urne U_1 »
 - B : « Piocher une boule noire et une boule blanche dans l'urne U_1 »
 - C : « Piocher deux boules blanches dans l'urne U_1 »
 - N : « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 »

Le nombre de tirage avec 2 boules noires est $\binom{4}{2} = 6$ donc $P(A) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$. Le nombre de tirage avec une boule noire et une boule blanche est 24 donc $P(B) = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$. Le nombre de tirage avec 2 boules blanches est $\binom{6}{2} = 15$ donc $P(C) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$. On peut alors représenter la situation par l'arbre :



Les événements A , B et C forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(N) &= P(A) \times P_A(N) + P(B) \times P_B(N) + P(C) \times P_C(N) \\ &= \frac{2}{15} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{15} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est donc :

$$\boxed{P(N) = 0,3}$$

Elle est donc supérieure à celle obtenue avec l'expérience de la partie A (qui était égale à 0,28).

Commentaires

- Dans la question 2, on obtient $n \geq 7,01$. On est alors très tenté de dire $n \geq 7$ car on est très proche de 7... Mais non ! L'entier n doit être plus grand que 7,01 donc il n'y a pas le choix, il faut attendre $n = 8$ (c'est rageant mais c'est comme ça).
- Dans la partie C, lorsque l'on parle du nombre de tirages possibles, il faut envisager chaque boule dans son individualité et ne pas la réduire à sa couleur. On fait comme si les boules étaient numérotées de 1 à 10.

Exercice 3

Énoncé

(4 points)

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes et justifier votre réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans la notation. Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \frac{25 + (-1)^n}{n}$.

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{w_n}{1 + w_n} \end{cases}$.

On admet que pour tout entier naturel n , $w_n > 0$.

On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \frac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \ln(1 + v_n) \end{cases}$.

On admet que pour tout entier naturel n , $v_n > 0$.

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

Correction

1. **Affirmation 1 : Faux**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

Donc :

$$24 \leq 25 + (-1)^n \leq 26$$

Puis :

$$\frac{24}{n} \leq \frac{25 + (-1)^n}{n} \leq \frac{26}{n}$$

Soit :

$$\frac{24}{n} \leq u_n \leq \frac{26}{n}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{24}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{26}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers 0.

2. **Affirmation 2 : Vrai**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= \frac{k}{w_{n+1}} - \frac{k}{w_n} \\ &= \frac{k(1+w_n)}{w_n} - \frac{k}{w_n} \\ &= \frac{k + kw_n - k}{w_n} \\ &= \frac{kw_n}{w_n} \\ &= k \end{aligned}$$

Cela prouve que la suite (t_n) est arithmétique de raison k . Et comme k est strictement positif, elle est strictement croissante.

3. Affirmation 3 : Vrai

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$.

- **Initialisation :**

Pour $n = 0$, on a $v_0 = 1$ et $v_1 = \ln(2) \approx 0,69$ donc $v_1 \leq v_0$ et la propriété est vraie.

- **Hérédité :**

Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$v_{n+1} \leq v_n$$

On a alors :

$$1 + v_{n+1} \leq 1 + v_n$$

Puis, en appliquant la fonction $\ln$ qui est croissante sur $]0; +\infty[$:

$$\ln(1 + v_{n+1}) \leq \ln(1 + v_n)$$

Soit :

$$v_{n+2} \leq v_{n+1}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$. Cela prouve que la suite (v_n) est décroissante.

4. Affirmation 4 : Vrai

On a :

$$I_{n+1} = \int_1^e (\ln(x))^{n+1} dx$$

Pour tout $x \in [1; e]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = (\ln(x))^{n+1} \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln(x))^n \\ v(x) = x \end{cases}$$

On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln(x))^{n+1} dx &= \left[x (\ln(x))^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{n+1}{x} \times (\ln(x))^n \times x dx \\ &= e (\ln(e))^{n+1} - (\ln(1))^{n+1} - \int_1^e (n+1) (\ln(x))^n dx \\ &= e - (n+1) \int_1^e (\ln(x))^n dx \\ &= e - (n+1) I_n \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$I_{n+1} = e - (n+1) I_n$$

Commentaires

- Pour l'affirmation 3, le recours à une récurrence me paraît inévitable. Les méthodes classiques consistant à calculer $v_{n+1} - v_n$ ou $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ ne semblent pas aboutir ici.

Exercice 4

Énoncé

(5 points)

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.
 Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment $[EF]$, où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et à (d_2) .
 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (d_1) , la droite passant par $A(1; 2; -1)$ de vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont

une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1) .
2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

3. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\vec{u}_1$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $-2x + y + 5z + 5 = 0$.

- 4.(a) Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.
 (b) On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathcal{P}$. Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -1\right)$.

- 5.(a) Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2) .
 (b) Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2) .

Correction

1. La droite (d_1) passe par $A(1; 2; -1)$ et admet le vecteur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R}$$

2. La droite (d_1) est dirigée par le vecteur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la droite (d_2) est dirigée par le vecteur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Leurs vecteurs directeurs n'étant pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles. Étudions leur intersection :

$$\begin{cases} 1 + t' = 0 \\ 2 + 2t' = 1 + t \\ -1 = 2 + t \end{cases} \iff \begin{cases} t' = -1 \\ 0 = -2 \\ t = -3 \end{cases}$$

Ce système étant impossible, il n'admet aucune solution. Les droites (d_1) et (d_2) ne sont donc pas sécantes.

On a montré qu'elles ne sont ni sécantes ni parallèles donc :

Les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires

3. Considérons le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. On a :

- $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = -2 \times 1 + 1 \times 2 + 5 \times 0 = -2 + 2 = 0$
- $\vec{n} \cdot \vec{w} = -2 \times 2 + 1 \times (-1) + 5 \times 1 = -4 - 1 + 5 = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ étant orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$, il est normal à ce plan. Le plan $\mathcal{P}$ admet donc une équation de la forme $-2x + y + 5z + d = 0$. Et comme le point A appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation, soit $-2 + 2 - 5 + d = 0$ et donc $d = 5$. Le plan $\mathcal{P}$ admet donc pour équation cartésienne :

$$-2x + y + 5z + 5 = 0$$

4.(a) La droite (d_2) est dirigée par le vecteur $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le plan $\mathcal{P}$ admet pour vecteur normal le

vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Or :

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = -2 \times 0 + 1 \times 1 + 5 \times 1 = 6 \neq 0$$

Le vecteur $\vec{u}_2$ n'étant pas orthogonal au vecteur $\vec{n}$, la droite (d_2) n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$. On en déduit que :

La droite (d_2) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants

(b) On vérifie que :

- Le point F appartient à la droite (d_2) . En effet il s'agit du point de paramètre $t = -\frac{8}{3}$ dans la représentation paramétrique de l'énoncé.
- Le point F appartient au plan $\mathcal{P}$. En effet $-2 \times 0 + \left(-\frac{5}{3}\right) + 5 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 5 = -\frac{5}{3} - \frac{10}{3} + 5 = 0$.

Le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathcal{P}$ est donc bien le point :

$$F \left(0; -\frac{5}{3}; -\frac{2}{3} \right)$$

5.(a) Il s'agit de montrer que la droite (EF) est orthogonal à (d_1) et à (d_2) . On a $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et

donc :

- $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{u_1} = -\frac{2}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 - \frac{1}{3} \times 0 = 0$
- $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{u_2} = -\frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 1 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et à $\overrightarrow{u_2}$ donc la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et à (d_2) , on en déduit que :

La distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2)

(b) On a :

$$EF = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

La distance entre les droites (d_1) et (d_2) est donc :

$$EF = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Commentaires

- Dans la question 3, une équation du plan étant donnée dans l'énoncé, on aurait pu rédiger différemment en vérifiant que cette équation est bien celle d'un plan qui passe par le point A et donc un vecteur normal est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{w}$.