# Métropole - 12 septembre 2024 (remplacement)

Spécialité mathématiques - Baccalauréat

# Exercice 1

# Exercice 1

1. (a) On a :

$$\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)}$$

# Exercice 1

1. (a) On a :

$$\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{J\left(1\,;1\,;\frac{1}{2}\right)}$$

# Exercice 1

1. (a) On a :

$$\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{J\left(1\,;1\,;\frac{1}{2}\right)}$$

Et comme $N$ est le milieu de $[IJ]$,

# Exercice 1

1. (a) On a :

$$\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{J\left(1\,;1\,;\frac{1}{2}\right)}$$

Et comme $N$ est le milieu de $[IJ]$, on a $N\left(\dfrac{\frac{1}{2}+1}{2}\,;\dfrac{0+1}{2}\,;\dfrac{0+\frac{1}{2}}{2}\right)$

# Exercice 1

1. (a) On a :

$$\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;0\,;0\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{J\left(1\,;1\,;\frac{1}{2}\right)}$$

Et comme $N$ est le milieu de $[IJ]$, on a $N\left(\dfrac{\frac{1}{2}+1}{2}\,;\dfrac{0+1}{2}\,;\dfrac{0+\frac{1}{2}}{2}\right)$

, soit :

$$\boxed{N\left(\frac{3}{4}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{4}\right)}$$

1. (b) On a alors :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1-0,5\\1-0\\0,5-0\end{pmatrix}$$

1. (b) On a alors :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1-0,5\\1-0\\0,5-0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}1-0,75\\0-0,5\\1-0,25\end{pmatrix}$$

1. (b) On a alors :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1-0,5\\1-0\\0,5-0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}1-0,75\\0-0,5\\1-0,25\end{pmatrix}$$

Soit :

$$\boxed{\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0,5\\1\\0,5\end{pmatrix}}$$

1. (b) On a alors :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1-0,5\\1-0\\0,5-0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}1-0,75\\0-0,5\\1-0,25\end{pmatrix}$$

Soit :

$$\boxed{\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0,5\\1\\0,5\end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}0,25\\-0,5\\0,75\end{pmatrix}}$$

1. (c) On a :

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{NF} =$$

1. (c) On a :

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{NF} = 0,5\times 0,25 + 1\times(-0,5) + 0,5\times 0,75$$

1. (c) On a :

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{NF} = 0,5\times 0,25+1\times(-0,5)+0,5\times 0,75 = 0,125-0,5+0,375$$

1. (c) On a :

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{NF} = 0,5\times0,25+1\times(-0,5)+0,5\times0,75 = 0,125-0,5+0,375 = 0$$

1. (c) On a :

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{NF} = 0,5 \times 0,25 + 1 \times (-0,5) + 0,5 \times 0,75 = 0,125 - 0,5 + 0,375 = 0$$

Leur produit scalaire est nul donc :

1. (c) On a :

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{NF} = 0,5 \times 0,25 + 1 \times (-0,5) + 0,5 \times 0,75 = 0,125 - 0,5 + 0,375 = 0$$

Leur produit scalaire est nul donc :

$$\boxed{\text{Les vecteurs } \overrightarrow{IJ} \text{ et } \overrightarrow{NF} \text{ sont orthogonaux}}$$

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires,

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires, $NF$ est la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FIJ$.

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires, $NF$ est la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FIJ$. L'aire du triangle $FIJ$ est donc :

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires, $NF$ est la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FIJ$. L'aire du triangle $FIJ$ est donc :

$$\mathscr{A}_{FIJ} =$$

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires, $NF$ est la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FIJ$. L'aire du triangle $FIJ$ est donc :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{IJ \times NF}{2}$$

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires, $NF$ est la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FIJ$. L'aire du triangle $FIJ$ est donc :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{IJ \times NF}{2}$$

Or $IJ =$

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires, $NF$ est la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FIJ$. L'aire du triangle $FIJ$ est donc :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{IJ \times NF}{2}$$

Or $IJ = \sqrt{0,5^2 + 1^2 + 0,5^2}$

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires, $NF$ est la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FIJ$. L'aire du triangle $FIJ$ est donc :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{IJ \times NF}{2}$$

Or $IJ = \sqrt{0,5^2 + 1^2 + 0,5^2} = \sqrt{1,5}$

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires, $NF$ est la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FIJ$. L'aire du triangle $FIJ$ est donc :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{IJ \times NF}{2}$$

Or $IJ = \sqrt{0,5^2 + 1^2 + 0,5^2} = \sqrt{1,5} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires, $NF$ est la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FIJ$. L'aire du triangle $FIJ$ est donc :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{IJ \times NF}{2}$$

Or $IJ = \sqrt{0,5^2 + 1^2 + 0,5^2} = \sqrt{1,5} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ d'où :

$$\mathscr{A}_{FIJ} =$$

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires, $NF$ est la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FIJ$. L'aire du triangle $FIJ$ est donc :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{IJ \times NF}{2}$$

Or $IJ = \sqrt{0,5^2 + 1^2 + 0,5^2} = \sqrt{1,5} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ d'où :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{\sqrt{\dfrac{3}{2}} \times \dfrac{\sqrt{14}}{4}}{2}$$

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires, $NF$ est la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FIJ$. L'aire du triangle $FIJ$ est donc :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{IJ \times NF}{2}$$

Or $IJ = \sqrt{0,5^2 + 1^2 + 0,5^2} = \sqrt{1,5} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ d'où :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{\sqrt{\dfrac{3}{2}} \times \dfrac{\sqrt{14}}{4}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{4}$$

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires, $NF$ est la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FIJ$. L'aire du triangle $FIJ$ est donc :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{IJ \times NF}{2}$$

Or $IJ = \sqrt{0,5^2 + 1^2 + 0,5^2} = \sqrt{1,5} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ d'où :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{\sqrt{14}}{4}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{8}$$

1. (d) Les droites $(IJ)$ et $(NF)$ étant perpendiculaires, $NF$ est la hauteur issue de $F$ dans le triangle $FIJ$. L'aire du triangle $FIJ$ est donc :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{IJ \times NF}{2}$$

Or $IJ = \sqrt{0,5^2 + 1^2 + 0,5^2} = \sqrt{1,5} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ d'où :

$$\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{\sqrt{14}}{4}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{8}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{A}_{FIJ} = \frac{\sqrt{21}}{8}}$$

2. (a) On a :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FI} =$

2. (a) On a :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FI} = 4 \times (-0,5) - 1 \times 0 - 2 \times (-1)$

2. (a) On a :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FI} = 4 \times (-0,5) - 1 \times 0 - 2 \times (-1) = -2 + 2$

2. (a) On a :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FI} = 4 \times (-0,5) - 1 \times 0 - 2 \times (-1) = -2 + 2 = 0$

2. (a) On a :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FI} = 4 \times (-0,5) - 1 \times 0 - 2 \times (-1) = -2 + 2 = 0$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FJ} =$

2. (a) On a :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FI} = 4 \times (-0,5) - 1 \times 0 - 2 \times (-1) = -2 + 2 = 0$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FJ} = 4 \times 0 - 1 \times 1 - 2 \times (-0,5)$

2. (a) On a :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FI} = 4 \times (-0,5) - 1 \times 0 - 2 \times (-1) = -2 + 2 = 0$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FJ} = 4 \times 0 - 1 \times 1 - 2 \times (-0,5) = -1 + 1$

2. (a) On a :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FI} = 4 \times (-0,5) - 1 \times 0 - 2 \times (-1) = -2 + 2 = 0$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FJ} = 4 \times 0 - 1 \times 1 - 2 \times (-0,5) = -1 + 1 = 0$

2. (a) On a :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FI} = 4 \times (-0,5) - 1 \times 0 - 2 \times (-1) = -2 + 2 = 0$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FJ} = 4 \times 0 - 1 \times 1 - 2 \times (-0,5) = -1 + 1 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(FIJ)$,

2. (a) On a :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FI} = 4 \times (-0,5) - 1 \times 0 - 2 \times (-1) = -2 + 2 = 0$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{FJ} = 4 \times 0 - 1 \times 1 - 2 \times (-0,5) = -1 + 1 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(FIJ)$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{u} \text{ est normal au plan } (FIJ)}$$

2. (b) D'après la question précédente, le plan $(FIJ)$ admet une équation cartésienne de la forme :

2. (b) D'après la question précédente, le plan $(FIJ)$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$4x - y - 2z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

2. (b) D'après la question précédente, le plan $(FIJ)$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$4x - y - 2z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $F(1\,;\,0\,;\,1)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation.

2. (b) D'après la question précédente, le plan $(FIJ)$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$4x - y - 2z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $F(1\,;\,0\,;\,1)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $4 \times 1 - 0 - 2 \times 1 + d = 0$,

2. (b) D'après la question précédente, le plan $(FIJ)$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$4x - y - 2z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $F(1\,;\,0\,;\,1)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $4 \times 1 - 0 - 2 \times 1 + d = 0$, soit $d = -2$.

2. (b) D'après la question précédente, le plan $(FIJ)$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$4x - y - 2z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $F(1\,;\,0\,;\,1)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $4 \times 1 - 0 - 2 \times 1 + d = 0$, soit $d = -2$. Une équation cartésienne du plan $(FIJ)$ est donc :

2. (b) D'après la question précédente, le plan $(FIJ)$ admet une équation cartésienne de la forme :

$$4x - y - 2z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $F(1\,;0\,;1)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $4 \times 1 - 0 - 2 \times 1 + d = 0$, soit $d = -2$. Une équation cartésienne du plan $(FIJ)$ est donc :

$$\boxed{4x - y - 2z - 2 = 0}$$

2. (c) La droite $d$ passe par le point $H(0\,;1\,;1)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

2. (c) La droite $d$ passe par le point $H(0\,;\,1\,;\,1)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

2. (c) La droite $d$ passe par le point $H(0\,;1\,;1)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}}$$

2. (d) Déterminons les coordonnées du point $K$, projeté orthogonal du point $H$ sur le plan $(FIJ)$.

2. (d) Déterminons les coordonnées du point $K$, projeté orthogonal du point $H$ sur le plan $(FIJ)$. Il s'agit du point d'intersection de la droite $d$ et du plan $(FIJ)$.

2. (d) Déterminons les coordonnées du point $K$, projeté orthogonal du point $H$ sur le plan $(FIJ)$. Il s'agit du point d'intersection de la droite $d$ et du plan $(FIJ)$. On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de la droite $d$ dans l'équation cartésienne du plan $(FIJ)$ :

2. (d) Déterminons les coordonnées du point $K$, projeté orthogonal du point $H$ sur le plan $(FIJ)$. Il s'agit du point d'intersection de la droite $d$ et du plan $(FIJ)$. On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de la droite $d$ dans l'équation cartésienne du plan $(FIJ)$ :

$$4 \times 4t - (1-t) - 2(1-2t) - 2 = 0 \iff$$

2. (d) Déterminons les coordonnées du point $K$, projeté orthogonal du point $H$ sur le plan $(FIJ)$. Il s'agit du point d'intersection de la droite $d$ et du plan $(FIJ)$. On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de la droite $d$ dans l'équation cartésienne du plan $(FIJ)$ :

$$4 \times 4t - (1 - t) - 2(1 - 2t) - 2 = 0 \Longleftrightarrow 16t - 1 + t - 2 + 4t - 2 = 0$$

2. (d) Déterminons les coordonnées du point $K$, projeté orthogonal du point $H$ sur le plan $(FIJ)$. Il s'agit du point d'intersection de la droite $d$ et du plan $(FIJ)$. On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de la droite $d$ dans l'équation cartésienne du plan $(FIJ)$ :

$$\begin{aligned} 4\times 4t-(1-t)-2(1-2t)-2=0 &\iff 16t-1+t-2+4t-2=0 \\ &\iff 21t=5 \end{aligned}$$

2. (d) Déterminons les coordonnées du point $K$, projeté orthogonal du point $H$ sur le plan $(FIJ)$. Il s'agit du point d'intersection de la droite $d$ et du plan $(FIJ)$. On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de la droite $d$ dans l'équation cartésienne du plan $(FIJ)$ :

$$\begin{aligned}
4 \times 4t - (1-t) - 2(1-2t) - 2 = 0 &\iff 16t - 1 + t - 2 + 4t - 2 = 0 \\
&\iff 21t = 5 \\
&\iff t = \frac{5}{21}
\end{aligned}$$

2. (d) Déterminons les coordonnées du point $K$, projeté orthogonal du point $H$ sur le plan $(FIJ)$. Il s'agit du point d'intersection de la droite $d$ et du plan $(FIJ)$. On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de la droite $d$ dans l'équation cartésienne du plan $(FIJ)$ :

$$\begin{aligned} 4 \times 4t - (1-t) - 2(1-2t) - 2 = 0 &\iff 16t - 1 + t - 2 + 4t - 2 = 0 \\ &\iff 21t = 5 \\ &\iff t = \frac{5}{21} \end{aligned}$$

Le point $K$ est donc le point de paramètre $t = \dfrac{5}{21}$ dans la représentation paramétrique de $d$,

2. (d) Déterminons les coordonnées du point $K$, projeté orthogonal du point $H$ sur le plan $(FIJ)$. Il s'agit du point d'intersection de la droite $d$ et du plan $(FIJ)$. On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de la droite $d$ dans l'équation cartésienne du plan $(FIJ)$ :

$$\begin{aligned}4 \times 4t - (1-t) - 2(1-2t) - 2 = 0 &\iff 16t - 1 + t - 2 + 4t - 2 = 0\\ &\iff 21t = 5\\ &\iff t = \frac{5}{21}\end{aligned}$$

Le point $K$ est donc le point de paramètre $t = \dfrac{5}{21}$ dans la représentation paramétrique de $d$, soit le point de coordonnées :

$$\left(\frac{20}{21} ; \frac{16}{21} ; \frac{11}{21}\right)$$

On a alors :

$$HK =$$

On a alors :

$$HK = \sqrt{\left(0 - \frac{20}{21}\right)^2 + \left(1 - \frac{16}{21}\right)^2 + \left(1 - \frac{11}{21}\right)^2}$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
HK &= \sqrt{\left(0-\frac{20}{21}\right)^2+\left(1-\frac{16}{21}\right)^2+\left(1-\frac{11}{21}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{400+25+100}{21^2}}
\end{aligned}
$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
HK &= \sqrt{\left(0-\frac{20}{21}\right)^2+\left(1-\frac{16}{21}\right)^2+\left(1-\frac{11}{21}\right)^2}\\
&= \sqrt{\frac{400+25+100}{21^2}}\\
&= \sqrt{\frac{525}{21^2}}
\end{aligned}
$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
HK &= \sqrt{\left(0-\frac{20}{21}\right)^2+\left(1-\frac{16}{21}\right)^2+\left(1-\frac{11}{21}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{400+25+100}{21^2}} \\
&= \sqrt{\frac{525}{21^2}} \\
&= \frac{5\sqrt{21}}{21}
\end{aligned}
$$

On a alors :

$$HK = \sqrt{\left(0 - \frac{20}{21}\right)^2 + \left(1 - \frac{16}{21}\right)^2 + \left(1 - \frac{11}{21}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{400 + 25 + 100}{21^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{525}{21^2}}$$
$$= \frac{5\sqrt{21}}{21}$$

Et comme la distance du point $H$ au plan $(FIJ)$ est la distance entre le point $H$ et son projeté orthogonal sur le plan $(FIJ)$,

On a alors :

$$\begin{aligned}
HK &= \sqrt{\left(0-\frac{20}{21}\right)^2+\left(1-\frac{16}{21}\right)^2+\left(1-\frac{11}{21}\right)^2}\\
&= \sqrt{\frac{400+25+100}{21^2}}\\
&= \sqrt{\frac{525}{21^2}}\\
&= \frac{5\sqrt{21}}{21}
\end{aligned}$$

Et comme la distance du point $H$ au plan $(FIJ)$ est la distance entre le point $H$ et son projeté orthogonal sur le plan $(FIJ)$, cette distance est :

$$\boxed{HK = \frac{5\sqrt{21}}{21}}$$

2. (e) En choisissant pour base le triangle $FIJ$, la hauteur correspondante est la longueur $HK$.

2. (e) En choisissant pour base le triangle $FIJ$, la hauteur correspondante est la longueur $HK$. Le volume du tétraèdre $HFIJ$ est alors :

2. (e) En choisissant pour base le triangle $FIJ$, la hauteur correspondante est la longueur $HK$. Le volume du tétraèdre $HFIJ$ est alors :

$$\mathscr{V}_{HFIJ} =$$

2. (e) En choisissant pour base le triangle $FIJ$, la hauteur correspondante est la longueur $HK$. Le volume du tétraèdre $HFIJ$ est alors :

$$\mathscr{V}_{HFIJ} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{FIJ} \times HK$$

2. (e) En choisissant pour base le triangle $FIJ$, la hauteur correspondante est la longueur $HK$. Le volume du tétraèdre $HFIJ$ est alors :

$$\mathscr{V}_{HFIJ} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{FIJ} \times HK = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{8} \times \frac{5\sqrt{21}}{21}$$

2. (e) En choisissant pour base le triangle $FIJ$, la hauteur correspondante est la longueur $HK$. Le volume du tétraèdre $HFIJ$ est alors :

$$\mathscr{V}_{HFIJ} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{FIJ} \times HK = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{8} \times \frac{5\sqrt{21}}{21} = \frac{5}{24}$$

2. (e) En choisissant pour base le triangle $FIJ$, la hauteur correspondante est la longueur $HK$. Le volume du tétraèdre $HFIJ$ est alors :

$$\mathscr{V}_{HFIJ} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{FIJ} \times HK = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{8} \times \frac{5\sqrt{21}}{21} = \frac{5}{24}$$

Le volume du tétraèdre $HFIJ$ est donc :

2. (e) En choisissant pour base le triangle $FIJ$, la hauteur correspondante est la longueur $HK$. Le volume du tétraèdre $HFIJ$ est alors :

$$\mathscr{V}_{HFIJ} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{FIJ} \times HK = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{8} \times \frac{5\sqrt{21}}{21} = \frac{5}{24}$$

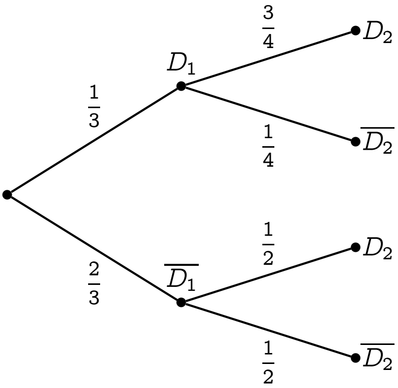
Le volume du tétraèdre $HFIJ$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{V}_{HFIJ} = \frac{5}{24}}$$

1. On complète l'arbre de la façon suivante :

# Exercice 2 - Partie A

1. On complète l'arbre de la façon suivante :




2. Il s'agit de calculer $P(D_1 \cap D_2)$ :

2. Il s'agit de calculer $P(D_1 \cap D_2)$ :

$$P(D_1 \cap D_2) =$$

2. Il s'agit de calculer $P(D_1 \cap D_2)$ :

$$P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2)$$

2. Il s'agit de calculer $P(D_1 \cap D_2)$ :

$$\begin{aligned} P(D_1 \cap D_2) &= P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2. Il s'agit de calculer $P(D_1 \cap D_2)$ :

$$\begin{aligned} P(D_1 \cap D_2) &= P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. Il s'agit de calculer $P(D_1 \cap D_2)$ :

$$\begin{aligned} P(D_1 \cap D_2) &= P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

La probabilité que le robot se déplace deux fois à droite est donc :

2. Il s'agit de calculer $P(D_1 \cap D_2)$ :

$$\begin{aligned} P(D_1 \cap D_2) &= P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

La probabilité que le robot se déplace deux fois à droite est donc :

$$\boxed{P(D_1 \cap D_2) = \frac{1}{4}}$$

3. Les événements $D_1$ et $\overline{D_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

3. Les événements $D_1$ et $\overline{D_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(D_2) =$$

3. Les événements $D_1$ et $\overline{D_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(D_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) + P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(D_2)$$

3. Les événements $D_1$ et $\overline{D_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D_2) &= P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) + P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Les événements $D_1$ et $\overline{D_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(D_2) &= P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) + P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

3. Les événements $D_1$ et $\overline{D_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(D_2) &= P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) + P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

3. Les événements $D_1$ et $\overline{D_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(D_2) &= P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) + P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{p_2 = \frac{7}{12}}$$

4. Il s'agit de calculer $P_{\overline{D_2}}(D_1)$ :

4. Il s'agit de calculer $P_{\overline{D_2}}(D_1)$ :

$$P_{\overline{D_2}}(D_1) =$$

4. Il s'agit de calculer $P_{\overline{D_2}}(D_1)$ :

$$P_{\overline{D_2}}(D_1) = \frac{P(D_1 \cap \overline{D_2})}{P(\overline{D_2})}$$

4. Il s'agit de calculer $P_{\overline{D_2}}(D_1)$ :

$$\begin{aligned} P_{\overline{D_2}}(D_1) &= \frac{P(D_1 \cap \overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\ &= \frac{P(D_1) \times P_{D_1}(\overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \end{aligned}$$

4. Il s'agit de calculer $P_{\overline{D_2}}(D_1)$ :

$$\begin{aligned} P_{\overline{D_2}}(D_1) &= \frac{P(D_1 \cap \overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\ &= \frac{P(D_1) \times P_{D_1}(\overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} \end{aligned}$$

4. Il s'agit de calculer $P_{\overline{D_2}}(D_1)$ :

$$\begin{aligned} P_{\overline{D_2}}(D_1) &= \frac{P(D_1 \cap \overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\ &= \frac{P(D_1) \times P_{D_1}(\overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{12}{5} \end{aligned}$$

4. Il s'agit de calculer $P_{\overline{D_2}}(D_1)$ :

$$\begin{aligned} P_{\overline{D_2}}(D_1) &= \frac{P(D_1 \cap \overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\ &= \frac{P(D_1) \times P_{D_1}(\overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{12}{5} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

4. Il s'agit de calculer $P_{\overline{D_2}}(D_1)$ :

$$\begin{aligned}
P_{\overline{D_2}}(D_1) &= \frac{P(D_1 \cap \overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\
&= \frac{P(D_1) \times P_{D_1}(\overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\
&= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} \\
&= \frac{1}{12} \times \frac{12}{5} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

La probabilité que le robot se soit déplacé à droite lors du premier déplacement sachant qu'il s'est déplacé à gauche lors du deuxième est donc :

4. Il s'agit de calculer $P_{\overline{D_2}}(D_1)$ :

$$\begin{aligned}
P_{\overline{D_2}}(D_1) &= \frac{P(D_1 \cap \overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\
&= \frac{P(D_1) \times P_{D_1}(\overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\
&= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} \\
&= \frac{1}{12} \times \frac{12}{5} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

La probabilité que le robot se soit déplacé à droite lors du premier déplacement sachant qu'il s'est déplacé à gauche lors du deuxième est donc :

$$\boxed{P_{\overline{D_2}}(D_1) = \frac{1}{5}}$$

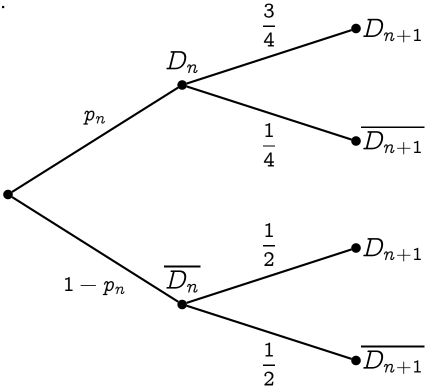
# Partie B

# Partie B

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on peut représenter la situation par l'arbre suivant :

# Partie B

1. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on peut représenter la situation par l'arbre suivant :




Les événements $D_n$ et $\overline{D_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

Les événements $D_n$ et $\overline{D_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(D_{n+1}) =$$

Les événements $D_n$ et $\overline{D_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(D_{n+1}) = P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1})$$

Les événements $D_n$ et $\overline{D_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D_{n+1}) &= P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Les événements $D_n$ et $\overline{D_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(D_{n+1}) &= P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) \\
&= p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n
\end{aligned}$$

Les événements $D_n$ et $\overline{D_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(D_{n+1}) &= P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) \\
&= p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n \\
&= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Les événements $D_n$ et $\overline{D_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D_{n+1}) &= P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}}$$

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**

  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$,

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$. On a alors, en multipliant par $\dfrac{1}{4}$ qui est positif :

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \frac{1}{3}$ et $p_2 = \frac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \frac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}$. On a alors, en multipliant par $\frac{1}{4}$ qui est positif :

$$\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$$

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$. On a alors, en multipliant par $\dfrac{1}{4}$ qui est positif :

  $$\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$$

  Puis en ajoutant $\dfrac{1}{2}$ :

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$. On a alors, en multipliant par $\dfrac{1}{4}$ qui est positif :

$$\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$$

  Puis en ajoutant $\dfrac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$. On a alors, en multipliant par $\dfrac{1}{4}$ qui est positif :

$$\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$$

  Puis en ajoutant $\dfrac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

  Soit :

$$p_{n+1} \leqslant p_{n+2} < \frac{2}{3}$$

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$. On a alors, en multipliant par $\dfrac{1}{4}$ qui est positif :
  $$\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$$
  Puis en ajoutant $\dfrac{1}{2}$ :
  $$\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$
  Soit :
  $$p_{n+1} \leqslant p_{n+2} < \frac{2}{3}$$
  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$. On a alors, en multipliant par $\dfrac{1}{4}$ qui est positif :
  $$\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$$
  Puis en ajoutant $\dfrac{1}{2}$ :
  $$\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$
  Soit :
  $$p_{n+1} \leqslant p_{n+2} < \frac{2}{3}$$
  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$. On a alors, en multipliant par $\dfrac{1}{4}$ qui est positif :
  $$\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$$
  Puis en ajoutant $\dfrac{1}{2}$ :
  $$\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$
  Soit :
  $$p_{n+1} \leqslant p_{n+2} < \frac{2}{3}$$
  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leqslant p_2 < \dfrac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n \leqslant p_{n+1} < \dfrac{2}{3}$. On a alors, en multipliant par $\dfrac{1}{4}$ qui est positif :
  $$\frac{1}{4}p_n \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$$
  Puis en ajoutant $\dfrac{1}{2}$ :
  $$\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$
  Soit :
  $$p_{n+1} \leqslant p_{n+2} < \frac{2}{3}$$
  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc, pour tout $n \geqslant 1$ :
  $$\boxed{p_n \leqslant p_{n+1} < \frac{2}{3}}$$

2. (b) La suite $(p_n)$ est :

2. (b) La suite $(p_n)$ est :

- croissante

2. (b) La suite $(p_n)$ est :

- croissante (car $p_n \leqslant p_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

2. (b) La suite $(p_n)$ est :

- croissante (car $p_n \leqslant p_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)
- majorée

2. (b) La suite $(p_n)$ est :

- croissante (car $p_n \leqslant p_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)
- majorée (car $p_n < \dfrac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

2. (b) La suite $(p_n)$ est :

- croissante (car $p_n \leqslant p_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)
- majorée (car $p_n < \dfrac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (p_n) \text{ est convergente}}$$

3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$u_{n+1} =$$

3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3}$$

3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right) \end{aligned}$$

3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3}\\
&= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\\
&= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6}\\
&= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right)\\
&= \frac{1}{4}u_n
\end{aligned}$$

3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{4}u_n
\end{aligned}$$

Et comme $u_1 = p_1 - \dfrac{2}{3}$

3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{4}u_n
\end{aligned}$$

Et comme $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$

3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{4}u_n
\end{aligned}$$

Et comme $u_1 = p_1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3}$,

3. (a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{4}u_n \end{aligned}$$

Et comme $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{4} \text{ et de 1}^{\text{er}} \text{ terme } u_0 = -\frac{1}{3}}$$

3. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},$$

3. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$, on a
$u_n = u_0 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$, soit :

$$u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

3. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, soit :

$$u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Et comme $u_n = p_n - \frac{2}{3}$,

3. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = u_0 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$, soit :

$$u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Et comme $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$, on a $p_n = u_n + \dfrac{2}{3}$,

3. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = u_0 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$, soit :

$$u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Et comme $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$, on a $p_n = u_n + \dfrac{2}{3}$, soit :

$$p_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

3. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, soit :

$$u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Et comme $u_n = p_n - \frac{2}{3}$, on a $p_n = u_n + \frac{2}{3}$, soit :

$$p_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

Or $-1 < \frac{1}{4} < 1$

3. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, soit :

$$u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Et comme $u_n = p_n - \frac{2}{3}$, on a $p_n = u_n + \frac{2}{3}$, soit :

$$p_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

Or $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$

3. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, soit :

$$u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Et comme $u_n = p_n - \frac{2}{3}$, on a $p_n = u_n + \frac{2}{3}$, soit :

$$p_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

Or $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{3}}$$

3. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, soit :

$$u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Et comme $u_n = p_n - \frac{2}{3}$, on a $p_n = u_n + \frac{2}{3}$, soit :

$$p_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

Or $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{3}}$$

Cela signifie, qu'à long terme, la probabilité que le robot se déplace à droite, pour un déplacement donné, sera proche de $\frac{2}{3}$.

# Partie C

# Partie C

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de déplacements vers la droite sur les 10 déplacements.

# Partie C

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de déplacements vers la droite sur les 10 déplacements. Comme on répète 10 fois une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (le robot se déplace vers la droite) est égale à $\dfrac{3}{4}$,

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de déplacements vers la droite sur les 10 déplacements. Comme on répète 10 fois une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (le robot se déplace vers la droite) est égale à $\frac{3}{4}$, la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$.

# Partie C

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de déplacements vers la droite sur les 10 déplacements. Comme on répète 10 fois une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (le robot se déplace vers la droite) est égale à $\dfrac{3}{4}$, la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{3}{4}$. De plus, le robot revient à son point de départ si et seulement si il effectue exactement 5 déplacements vers la droite.

# Partie C

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de déplacements vers la droite sur les 10 déplacements. Comme on répète 10 fois une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (le robot se déplace vers la droite) est égale à $\frac{3}{4}$, la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$. De plus, le robot revient à son point de départ si et seulement si il effectue exactement 5 déplacements vers la droite. On obtient alors, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité que le robot revienne à son point de départ au bout des dix déplacements est :

# Partie C

Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de déplacements vers la droite sur les 10 déplacements. Comme on répète 10 fois une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (le robot se déplace vers la droite) est égale à $\frac{3}{4}$, la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$. De plus, le robot revient à son point de départ si et seulement si il effectue exactement 5 déplacements vers la droite. On obtient alors, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité que le robot revienne à son point de départ au bout des dix déplacements est :

$$\boxed{P(X = 5) \approx 0,058}$$

# Exercice 3 - Partie A

# Exercice 3 - Partie A

1. On a :

$$f\left(\ln(5)\right) =$$

1. On a :

$$f\left(\ln(5)\right) = \frac{6}{1 + 5\mathrm{e}^{-\ln(5)}}$$

# Exercice 3 - Partie A

1. On a :

$$f\left(\ln(5)\right) = \frac{6}{1 + 5\mathrm{e}^{-\ln(5)}} = \frac{6}{1 + 5 \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(5)}}}$$

# Exercice 3 - Partie A

1. On a :

$$f\left(\ln(5)\right) = \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-\ln(5)}} = \frac{6}{1+5\times\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(5)}}} = \frac{6}{1+\frac{5}{5}} = \frac{6}{1+1} = \frac{6}{2}$$

# Exercice 3 - Partie A

1. On a :

$$f\left(\ln(5)\right) = \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-\ln(5)}} = \frac{6}{1+5\times\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(5)}}} = \frac{6}{1+\frac{5}{5}} = \frac{6}{1+1} = \frac{6}{2} = 3$$

1. On a :

$$f\left(\ln(5)\right) = \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-\ln(5)}} = \frac{6}{1+5\times\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(5)}}} = \frac{6}{1+\frac{5}{5}} = \frac{6}{1+1} = \frac{6}{2} = 3$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point } A(\ln(5)\,;\,3) \text{ appartient à la courbe } \mathscr{C}_f}$$

2. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 6}$$

2. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 6} \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$

2. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 6} \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f'(x) =$$

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f'(x) = -\frac{6 \times \left(-5\mathrm{e}^{-x}\right)}{\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$$

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f'(x) = -\frac{6 \times \left(-5\mathrm{e}^{-x}\right)}{\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} = \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$$

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$f'(x) = -\frac{6 \times (-5\mathrm{e}^{-x})}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}$$
$$= \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}}$$

3. (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$

3. (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$.

3. (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0}$$

3. (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0} \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$$

3. (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0} \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$$

On a donc le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $6$ |

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30\mathrm{e}^{-x} > 0$

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right)^3 > 0$

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right)^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $5\mathrm{e}^{-x} - 1$.

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right)^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $5\mathrm{e}^{-x} - 1$. Or :

$$5\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow$$

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right)^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $5\mathrm{e}^{-x} - 1$. Or :

$$5\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1$$

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right)^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $5\mathrm{e}^{-x} - 1$. Or :

$$\begin{aligned} 5\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0 &\iff 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{1}{5} \end{aligned}$$

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right)^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $5\mathrm{e}^{-x} - 1$. Or :

$$\begin{aligned} 5\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0 &\iff 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{1}{5} \\ &\iff -x \geqslant \ln\left(\frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $5\mathrm{e}^{-x} - 1$. Or :

$$\begin{aligned} 5\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0 &\iff 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{1}{5} \\ &\iff -x \geqslant \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\iff x \leqslant -\ln\left(\frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\left(1 + 5\mathrm{e}^{-x}\right)^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $5\mathrm{e}^{-x} - 1$. Or :

$$\begin{aligned} 5\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0 &\iff 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{1}{5} \\ &\iff -x \geqslant \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\iff x \leqslant -\ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\iff x \leqslant \ln(5) \end{aligned}$$

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30e^{-x} > 0$ et $(1 + 5e^{-x})^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $5e^{-x} - 1$. Or :

$$\begin{aligned} 5e^{-x} - 1 \geqslant 0 &\iff 5e^{-x} \geqslant 1 \\ &\iff e^{-x} \geqslant \frac{1}{5} \\ &\iff -x \geqslant \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\iff x \leqslant -\ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\iff x \leqslant \ln(5) \end{aligned}$$

On en déduit le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln(5)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | convexe | | concave | |

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30e^{-x} > 0$ et $(1+5e^{-x})^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $5e^{-x} - 1$. Or :

$$\begin{aligned} 5e^{-x} - 1 \geqslant 0 &\iff 5e^{-x} \geqslant 1 \\ &\iff e^{-x} \geqslant \frac{1}{5} \\ &\iff -x \geqslant \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\iff x \leqslant -\ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\iff x \leqslant \ln(5) \end{aligned}$$

On en déduit le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln(5)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | convexe | | concave | |

En $\ln(5)$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe donc :

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $(1+5\mathrm{e}^{-x})^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $5\mathrm{e}^{-x} - 1$. Or :

$$\begin{aligned} 5\mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0 &\Longleftrightarrow 5\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \geqslant \frac{1}{5} \\ &\Longleftrightarrow -x \geqslant \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\Longleftrightarrow x \leqslant -\ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\Longleftrightarrow x \leqslant \ln(5) \end{aligned}$$

On en déduit le tableau :

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln(5)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | convexe | | concave | |

En $\ln(5)$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe donc :

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C}_f \text{ admet } A \text{ pour point d'inflexion}}$$

4. (b) Déterminons une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

4. (b) Déterminons une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On a $f(0) = \dfrac{6}{1+5} = 1$

4. (b) Déterminons une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On a $f(0) = \dfrac{6}{1+5} = 1$ et $f'(0) = \dfrac{30}{6^2} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$.

4. (b) Déterminons une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
On a $f(0) = \dfrac{6}{1+5} = 1$ et $f'(0) = \dfrac{30}{6^2} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = \dfrac{5}{6}(x-0)+1$,

4. (b) Déterminons une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On a $f(0) = \dfrac{6}{1+5} = 1$ et $f'(0) = \dfrac{30}{6^2} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = \dfrac{5}{6}(x-0)+1$, soit :

$$y = \frac{5}{6}x + 1$$

4. (b) Déterminons une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On a $f(0) = \dfrac{6}{1+5} = 1$ et $f'(0) = \dfrac{30}{6^2} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = \dfrac{5}{6}(x-0)+1$, soit :

$$y = \frac{5}{6}x + 1$$

Et comme la fonction $f$ est convexe sur $]-\infty\,;\ln(5)]$,

4. (b) Déterminons une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On a $f(0) = \dfrac{6}{1+5} = 1$ et $f'(0) = \dfrac{30}{6^2} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = \dfrac{5}{6}(x-0)+1$, soit :

$$y = \frac{5}{6}x + 1$$

Et comme la fonction $f$ est convexe sur $]-\infty\,; \ln(5)]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangente sur cet intervalle.

4. (b) Déterminons une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On a $f(0) = \dfrac{6}{1+5} = 1$ et $f'(0) = \dfrac{30}{6^2} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = \dfrac{5}{6}(x-0)+1$, soit :

$$y = \frac{5}{6}x + 1$$

Et comme la fonction $f$ est convexe sur $]-\infty\,;\mathrm{ln}(5)]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangente sur cet intervalle. En particulier, elle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0

4. (b) Déterminons une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
On a $f(0) = \dfrac{6}{1+5} = 1$ et $f'(0) = \dfrac{30}{6^2} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = \dfrac{5}{6}(x-0)+1$, soit :

$$y = \frac{5}{6}x + 1$$

Et comme la fonction $f$ est convexe sur $]-\infty\,;\ln(5)]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangente sur cet intervalle. En particulier, elle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0 d'où, pour tout $x \in ]-\infty\,;\ln(5)]$ :

4. (b) Déterminons une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
On a $f(0) = \dfrac{6}{1+5} = 1$ et $f'(0) = \dfrac{30}{6^2} = \dfrac{30}{36} = \dfrac{5}{6}$. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = \dfrac{5}{6}(x-0)+1$, soit :

$$y = \frac{5}{6}x + 1$$

Et comme la fonction $f$ est convexe sur $]-\infty\,;\ln(5)]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangente sur cet intervalle. En particulier, elle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0 d'où, pour tout $x \in \,]-\infty\,;\ln(5)]$ :

$$\boxed{f(x) \geqslant \frac{5}{6}x + 1}$$

5. (a) La fonction $F_k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

5. (a) La fonction $F_k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$F_k'(x) =$$

5. (a) La fonction $F_k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$F_k'(x) = \frac{k\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5}$$

5. (a) La fonction $F_k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$F_k'(x) = \frac{k\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5} = \frac{k}{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x + 5)}$$

5. (a) La fonction $F_k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$F_k'(x) = \frac{k\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5} = \frac{k}{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x + 5)} = \frac{k}{1 + 5\mathrm{e}^{-x})}$$

5. (a) La fonction $F_k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$F_k'(x) = \frac{k\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5} = \frac{k}{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x + 5)} = \frac{k}{1 + 5\mathrm{e}^{-x})}$$

On en déduit que $F_k$ est une primitive de $f$ si et seulement si :

5. (a) La fonction $F_k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$F_k'(x) = \frac{k\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 5} = \frac{k}{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x + 5)} = \frac{k}{1 + 5\mathrm{e}^{-x})}$$

On en déduit que $F_k$ est une primitive de $f$ si et seulement si :

$$\boxed{k = 6}$$

5. (b) Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x$ :

5. (b) Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x$ :

$$\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

5. (b) Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x$ :

$$\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[6\ln\left(\mathrm{e}^x + 5\right)\Big]_0^{\ln(5)}$$

5. (b) Il s'agit de calculer $\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x$ :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[6\ln\left(\mathrm{e}^x+5\right)\right]_0^{\ln(5)}\\ &= 6\ln\left(\mathrm{e}^{\ln(5)}+5\right)-6\ln\left(\mathrm{e}^0+5\right)\end{aligned}$$

5. (b) Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x$ :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[6\ln\left(\mathrm{e}^x+5\right)\Big]_0^{\ln(5)}\\ &= 6\ln\left(\mathrm{e}^{\ln(5)}+5\right)-6\ln\left(\mathrm{e}^0+5\right)\\ &= 6\ln(5+5)-6\ln(1+5)\end{aligned}$$

5. (b) Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x$ :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[6\ln\left(\mathrm{e}^x+5\right)\Big]_0^{\ln(5)}\\ &= 6\ln\left(\mathrm{e}^{\ln(5)}+5\right)-6\ln\left(\mathrm{e}^0+5\right)\\ &= 6\ln(5+5)-6\ln(1+5)\\ &= 6\left(\ln(10)-\ln(6)\right)\end{aligned}$$

5. (b) Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[6\ln\left(\mathrm{e}^x+5\right)\Big]_0^{\ln(5)} \\
&= 6\ln\left(\mathrm{e}^{\ln(5)}+5\right) - 6\ln\left(\mathrm{e}^0+5\right) \\
&= 6\ln(5+5) - 6\ln(1+5) \\
&= 6\left(\ln(10)-\ln(6)\right) \\
&= 6\ln\left(\frac{10}{6}\right)
\end{aligned}$$

5. (b) Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[6\ln\left(\mathrm{e}^x+5\right)\Big]_0^{\ln(5)} \\
&= 6\ln\left(\mathrm{e}^{\ln(5)}+5\right) - 6\ln\left(\mathrm{e}^0+5\right) \\
&= 6\ln(5+5) - 6\ln(1+5) \\
&= 6\left(\ln(10)-\ln(6)\right) \\
&= 6\ln\left(\frac{10}{6}\right) \\
&= 6\ln\left(\frac{5}{3}\right)
\end{aligned}$$

5. (b) Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[6\ln\left(\mathrm{e}^x+5\right)\Big]_0^{\ln(5)} \\
&= 6\ln\left(\mathrm{e}^{\ln(5)}+5\right) - 6\ln\left(\mathrm{e}^0+5\right) \\
&= 6\ln(5+5) - 6\ln(1+5) \\
&= 6\left(\ln(10)-\ln(6)\right) \\
&= 6\ln\left(\frac{10}{6}\right) \\
&= 6\ln\left(\frac{5}{3}\right)
\end{aligned}$$

L'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln(5)$ est donc :

5. (b) Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x$ :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[6\ln\left(\mathrm{e}^x+5\right)\Big]_0^{\ln(5)}\\ &= 6\ln\left(\mathrm{e}^{\ln(5)}+5\right)-6\ln\left(\mathrm{e}^0+5\right)\\ &= 6\ln(5+5)-6\ln(1+5)\\ &= 6\left(\ln(10)-\ln(6)\right)\\ &= 6\ln\left(\frac{10}{6}\right)\\ &= 6\ln\left(\frac{5}{3}\right)\end{aligned}$$

L'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\ln(5)$ est donc :

$$\boxed{\int_0^{\ln(5)} f(x)\,\mathrm{d}x = 6\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$$

# Partie B

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

# Partie B

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) - \frac{1}{6}(f(x))^2 =$$

# Partie B

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) - \frac{1}{6}\left(f(x)\right)^2 = \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}\right)^2$$

# Partie B

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) - \frac{1}{6}\left(f(x)\right)^2 = \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}\right)^2$$

$$= \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{6^2}{6\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$$

# Partie B

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{6}(f(x))^2 &= \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}\right)^2 \\ &= \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{6^2}{6\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \\ &= \frac{6(1+5\mathrm{e}^{-x})}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} - \frac{6}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \end{aligned}$$

# Partie B

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{1}{6}\left(f(x)\right)^2 &= \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}\right)^2 \\
&= \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{6^2}{6\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{6(1+5\mathrm{e}^{-x})}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} - \frac{6}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{6+30\mathrm{e}^{-x}-6}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2}
\end{aligned}$$

# Partie B

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{1}{6}\left(f(x)\right)^2 &= \frac{6}{1+5e^{-x}} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{6}{1+5e^{-x}}\right)^2 \\
&= \frac{6}{1+5e^{-x}} - \frac{6^2}{6\left(1+5e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{6(1+5e^{-x})}{\left(1+5e^{-x}\right)^2} - \frac{6}{\left(1+5e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{6+30e^{-x}-6}{\left(1+5e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{30e^{-x}}{\left(1+5e^{-x}\right)^2}
\end{aligned}$$

# Partie B

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{1}{6}\left(f(x)\right)^2 &= \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}\right)^2 \\
&= \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{6^2}{6\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{6(1+5\mathrm{e}^{-x})}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} - \frac{6}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{6+30\mathrm{e}^{-x}-6}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

# Partie B

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{1}{6}(f(x))^2 &= \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}\right)^2 \\
&= \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}} - \frac{6^2}{6\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{6(1+5\mathrm{e}^{-x})}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} - \frac{6}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{6+30\mathrm{e}^{-x}-6}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{\left(1+5\mathrm{e}^{-x}\right)^2} \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) - \dfrac{1}{6}(f(x))^2$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{1}{6}(f(x))^2 &= \frac{6}{1+5e^{-x}} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{6}{1+5e^{-x}}\right)^2 \\
&= \frac{6}{1+5e^{-x}} - \frac{6^2}{6\left(1+5e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{6(1+5e^{-x})}{\left(1+5e^{-x}\right)^2} - \frac{6}{\left(1+5e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{6+30e^{-x}-6}{\left(1+5e^{-x}\right)^2} \\
&= \frac{30e^{-x}}{\left(1+5e^{-x}\right)^2} \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) - \dfrac{1}{6}(f(x))^2$. On a montré que :

$\boxed{f \text{ est solution de l'équation différentielle } (E)}$

2. Résolvons l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$.

2. Résolvons l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$.

- L'équation homogène associée $y' = -y$ admet pour solutions les fonctions de la forme :

2. Résolvons l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$.

- L'équation homogène associée $y' = -y$ admet pour solutions les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Résolvons l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.

- L'équation homogène associée $y' = -y$ admet pour solutions les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{-x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- L'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$ admet pour solution particulière constante la fonction :

2. Résolvons l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.

- L'équation homogène associée $y' = -y$ admet pour solutions les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- L'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$ admet pour solution particulière constante la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{6}$$

2. Résolvons l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$.

- L'équation homogène associée $y' = -y$ admet pour solutions les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- L'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$ admet pour solution particulière constante la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{6}$$

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$ sont donc les fonctions de la forme :

2. Résolvons l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.

- L'équation homogène associée $y' = -y$ admet pour solutions les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{-x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- L'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$ admet pour solution particulière constante la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{6}$$

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$ sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto \lambda e^{-x} + \frac{1}{6} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$

3. (a) Supposons que $h$ est solution de l'équation différentielle
$$y' = -y + \frac{1}{6}.$$

3. (a) Supposons que $h$ est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$$

3. (a) Supposons que $h$ est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$$

Or, on a $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$

3. (a) Supposons que $h$ est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$$

Or, on a $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ donc $h'(x) = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$

3. (a) Supposons que $h$ est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$$

Or, on a $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ donc $h'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$ d'où :

$$-\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{6}$$

3. (a) Supposons que $h$ est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$$

Or, on a $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ donc $h'(x) = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$ d'où :

$$-\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{6}$$

D'où, en multipliant par $g(x)^2$ :

3. (a) Supposons que $h$ est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$$

Or, on a $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ donc $h'(x) = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$ d'où :

$$-\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{6}$$

D'où, en multipliant par $g(x)^2$ :

$$-g'(x) = -g(x) + \frac{1}{6}g(x)^2$$

3. (a) Supposons que $h$ est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$$

Or, on a $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ donc $h'(x) = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$ d'où :

$$-\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{6}$$

D'où, en multipliant par $g(x)^2$ :

$$-g'(x) = -g(x) + \frac{1}{6}g(x)^2$$

Soit :

$$g'(x) = g(x) - \frac{1}{6}g(x)^2$$

3. (a) Supposons que $h$ est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$$

Or, on a $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ donc $h'(x) = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$ d'où :

$$-\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{6}$$

D'où, en multipliant par $g(x)^2$ :

$$-g'(x) = -g(x) + \frac{1}{6}g(x)^2$$

Soit :

$$g'(x) = g(x) - \frac{1}{6}g(x)^2$$

Et donc :

$$\boxed{g \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = y - \frac{1}{6}y^2}$$

3. (b) La fonction $g_m$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc elle ne s'annule pas.

3. (b) La fonction $g_m$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc elle ne s'annule pas. Posons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

3. (b) La fonction $g_m$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc elle ne s'annule pas. Posons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)}$$

3. (b) La fonction $g_m$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc elle ne s'annule pas. Posons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)} = \frac{1 + 6m\mathrm{e}^{-x}}{6}$$

3. (b) La fonction $g_m$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc elle ne s'annule pas. Posons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)} = \frac{1 + 6m\mathrm{e}^{-x}}{6} = m\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{6}$$

3. (b) La fonction $g_m$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc elle ne s'annule pas. Posons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)} = \frac{1 + 6m\mathrm{e}^{-x}}{6} = m\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{6}$$

D'après la question 2, la fonction $h_m$ est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$

3. (b) La fonction $g_m$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc elle ne s'annule pas. Posons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)} = \frac{1 + 6m\mathrm{e}^{-x}}{6} = m\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{6}$$

D'après la question 2, la fonction $h_m$ est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$ donc, d'après la question a :

3. (b) La fonction $g_m$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc elle ne s'annule pas. Posons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)} = \frac{1 + 6m\mathrm{e}^{-x}}{6} = m\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{6}$$

D'après la question 2, la fonction $h_m$ est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \dfrac{1}{6}$ donc, d'après la question a :

$$\boxed{\text{La fonction } g_m \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = y - \frac{1}{6}y^2}$$

# Exercice 4

# Exercice 4

1. **Affirmation 1 : Vrai**

# Exercice 4

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $u_{n+1} = 1,05u_n + 3$.

# Exercice 4

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,05u_n + 3$. La fonction `seuil(S)` renvoie la valeur du plus petit entier $n$ tel que $u_n \geqslant S$.

# Exercice 4

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,05u_n + 3$. La fonction `seuil(S)` renvoie la valeur du plus petit entier $n$ tel que $u_n \geqslant S$. Or, on obtient à l'aide de la calculatrice :

# Exercice 4

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,05u_n + 3$. La fonction `seuil(S)` renvoie la valeur du plus petit entier $n$ tel que $u_n \geqslant S$. Or, on obtient à l'aide de la calculatrice :
   - $u_{17} \approx 93,6 < 100$

# Exercice 4

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,05u_n + 3$. La fonction `seuil(S)` renvoie la valeur du plus petit entier $n$ tel que $u_n \geqslant S$. Or, on obtient à l'aide de la calculatrice :
   - $u_{17} \approx 93,6 < 100$
   - $u_{18} \approx 101,2 > 100$

# Exercice 4

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,05u_n + 3$. La fonction `seuil(S)` renvoie la valeur du plus petit entier $n$ tel que $u_n \geqslant S$. Or, on obtient à l'aide de la calculatrice :
   - $u_{17} \approx 93,6 < 100$
   - $u_{18} \approx 101,2 > 100$

   Le plus petit entier tel que $u_n \geqslant 100$ est donc 18.

2. **Affirmation 2 : Vrai**

2. **Affirmation 2 : Vrai**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{5}$.

2. **Affirmation 2 : Vrai**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{5}$. On a donc :

$$S_n =$$

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{5}$. On a donc :

$$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}}$$

2. **Affirmation 2 : Vrai**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{5}$. On a donc :

$$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}}$$

2. **Affirmation 2 : Vrai**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{5}$. On a donc :

$$S_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{5}$. On a donc :

$$S_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Or $-1 < \dfrac{1}{5} < 1$

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{5}$. On a donc :

$$S_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Or $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$

2. **Affirmation 2 : Vrai**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{5}$. On a donc :

$$S_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Or $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{5}{4}$.

3. **Affirmation 3 : Faux**

3. **Affirmation 3 : Faux**
   Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 30 :

3. **Affirmation 3 : Faux**
   Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 30 :

$$\binom{30}{2} =$$

3. **Affirmation 3 : Faux**
   Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 30 :

$$\binom{30}{2} = \frac{30!}{2! \times (30-2)!}$$

3. **Affirmation 3 : Faux**
Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 30 :

$$\binom{30}{2} = \frac{30!}{2! \times (30-2)!} = \frac{30!}{2! \times 28!}$$

3. **Affirmation 3 : Faux**
Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 30 :

$$\binom{30}{2} = \frac{30!}{2! \times (30-2)!} = \frac{30!}{2! \times 28!} = \frac{29 \times 30}{2}$$

3. **Affirmation 3 : Faux**
Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 30 :

$$\binom{30}{2} = \frac{30!}{2! \times (30-2)!} = \frac{30!}{2! \times 28!} = \frac{29 \times 30}{2} = 435$$

3. **Affirmation 3 : Faux**
Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 30 :

$$\binom{30}{2} = \frac{30!}{2! \times (30-2)!} = \frac{30!}{2! \times 28!} = \frac{29 \times 30}{2} = 435$$

On peut donc former 435 binômes de délégués différents.

4. **Affirmation 4 : Vrai**

4. **Affirmation 4 : Vrai**
La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

4. **Affirmation 4 : Vrai**

La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

$$f'(x) =$$

4. **Affirmation 4 : Vrai**

La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

$$f'(x) = 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$$

4. **Affirmation 4 : Vrai**
La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \end{aligned}$$

4. **Affirmation 4 : Vrai**

La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \\ &= \ln(x)\,(\ln(x)+2) \end{aligned}$$

4. **Affirmation 4 : Vrai**

La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \\ &= \ln(x)\,(\ln(x)+2) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$

4. **Affirmation 4 : Vrai**

La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \\ &= \ln(x)\,(\ln(x)+2) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$.

4. **Affirmation 4 : Vrai**

La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \\ &= \ln(x)\,(\ln(x) + 2) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$. De plus, sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$.

4. **Affirmation 4 : Vrai**

La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \\ &= \ln(x)\,(\ln(x) + 2) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$. De plus, sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$. On en déduit que, sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$,

4. **Affirmation 4 : Vrai**

La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \\ &= \ln(x)\,(\ln(x)+2) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$. De plus, sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$. On en déduit que, sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $f$ est continue et strictement croissante.

4. **Affirmation 4 : Vrai**

La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,; +\infty[$ et pour tout $x \in [1\,; +\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \\ &= \ln(x)\,(\ln(x) + 2) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[1\,; +\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$. De plus, sur l'intervalle $]1\,; +\infty[$, $f'(x) > 0$. On en déduit que, sur l'intervalle $[1\,; +\infty[$, $f$ est continue et strictement croissante. De plus $f(0) = 0$

4. **Affirmation 4 : Vrai**

La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \\ &= \ln(x)\,(\ln(x)+2) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$. De plus, sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$. On en déduit que, sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $f$ est continue et strictement croissante. De plus $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. **Affirmation 4 : Vrai**

La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \\ &= \ln(x)\left(\ln(x)+2\right) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$. De plus, sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$. On en déduit que, sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $f$ est continue et strictement croissante. De plus $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $1 \in [0\,;+\infty[$

4. **Affirmation 4 : Vrai**

La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \\ &= \ln(x)\,(\ln(x)+2) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$. De plus, sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$. On en déduit que, sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $f$ est continue et strictement croissante. De plus $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $1 \in [0\,;+\infty[$ donc, d'après la théorème des valeurs intermédiaires,

4. **Affirmation 4 : Vrai**

La fonction $f$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) \\ &= \ln(x)\,(\ln(x)+2) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $\ln(x) \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$. De plus, sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, $f'(x) > 0$. On en déduit que, sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $f$ est continue et strictement croissante. De plus $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $1 \in [0\,;+\infty[$ donc, d'après la théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[1\,;+\infty[$.

5. **Affirmation 5 : Vrai**

5. **Affirmation 5 : Vrai**

   Pour tout $x \in [0\,; 1]$, posons :

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a, par intégration par parties :

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a, par intégration par parties :

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a, par intégration par parties :

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \end{aligned}$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 \end{aligned}$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 \\ &= 1 - 2\mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 \\ &= 1 - 2\mathrm{e}^{-1} \\ &= 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**

Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-x\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{e}^{-1} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 \\ &= -\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1} + 1 \\ &= 1 - 2\mathrm{e}^{-1} \\ &= 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \\ &= \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$