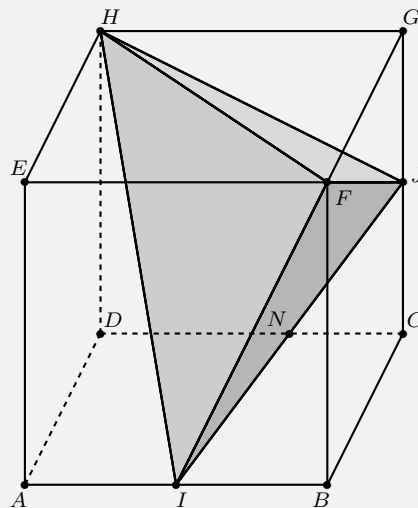


Exercice 1

Énoncé

(5 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.
 Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CG]$.
 Le point N est le milieu du segment $[IJ]$.
 L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre $HFIJ$.
 On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.



- 1.(a) Donner les coordonnées des points I et J . En déduire les coordonnées de N .
 (b) Justifier que les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{NF}$ ont pour coordonnées respectives :

$$\vec{IJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{NF} \begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}$$

- (c) Démontrer que les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{NF}$ sont orthogonaux.

On admet que $NF = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

- (d) En déduire que l'aire du triangle FIJ est égale à $\frac{\sqrt{21}}{8}$.

2. On considère le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- (a) Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (FIJ) .
- (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est : $4x - y - 2z - 2 = 0$.
- (c) On note d la droite orthogonale au plan (FIJ) passant par le point H . Déterminer une représentation paramétrique de la droite d .
- (d) Montrer que la distance du point H au plan (FIJ) est égale à $\frac{5\sqrt{21}}{21}$.
- (e) On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base. Calculer le volume du tétraèdre $HFIJ$. On donnera la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

Correction

1.(a) On a :

$$\boxed{I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{J\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)}$$

Et comme N est le milieu de $[IJ]$, on a $N\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{0+\frac{1}{2}}{2}\right)$, soit :

$$\boxed{N\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)}$$

(b) On a alors :

$$\vec{IJ}\begin{pmatrix} 1-0,5 \\ 1-0 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{NF}\begin{pmatrix} 1-0,75 \\ 0-0,5 \\ 1-0,25 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\boxed{\vec{IJ}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{NF}\begin{pmatrix} 0,25 \\ -0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}}$$

(c) On a :

$$\vec{IJ} \cdot \vec{NF} = 0,5 \times 0,25 + 1 \times (-0,5) + 0,5 \times 0,75 = 0,125 - 0,5 + 0,375 = 0$$

Leur produit scalaire est nul donc :

$$\boxed{\text{Les vecteurs } \vec{IJ} \text{ et } \vec{NF} \text{ sont orthogonaux}}$$

(d) Les droites (IJ) et (NF) étant perpendiculaires, NF est la hauteur issue de F dans le triangle FIJ . L'aire du triangle FIJ est donc :

$$\mathcal{A}_{FIJ} = \frac{IJ \times NF}{2}$$

Or $IJ = \sqrt{0,5^2 + 1^2 + 0,5^2} = \sqrt{1,5} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ d'où :

$$\mathcal{A}_{FIJ} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{\sqrt{14}}{4}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{8}$$

Soit :

$$\boxed{\mathcal{A}_{FIJ} = \frac{\sqrt{21}}{8}}$$

2.(a) On a :

- $\vec{u} \cdot \vec{FI} = 4 \times (-0,5) - 1 \times 0 - 2 \times (-1) = -2 + 2 = 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{FJ} = 4 \times 0 - 1 \times 1 - 2 \times (-0,5) = -1 + 1 = 0$

Le vecteur $\vec{u}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FIJ) , on en déduit que :

$$\boxed{\text{Le vecteur } \vec{u} \text{ est normal au plan } (FIJ)}$$

(b) D'après la question précédente, le plan (FIJ) admet une équation cartésienne de la forme :

$$4x - y - 2z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $F(1; 0; 1)$ appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $4 \times 1 - 0 - 2 \times 1 + d = 0$, soit $d = -2$. Une équation cartésienne du plan (FIJ) est donc :

$$\boxed{4x - y - 2z - 2 = 0}$$

(c) La droite d passe par le point $H(0; 1; 1)$ et admet le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}}$$

(d) Déterminons les coordonnées du point K , projeté orthogonal du point H sur le plan (FIJ) . Il s'agit du point d'intersection de la droite d et du plan (FIJ) . On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de la droite d dans l'équation cartésienne du plan (FIJ) :

$$\begin{aligned} 4 \times 4t - (1 - t) - 2(1 - 2t) - 2 &= 0 \iff 16t - 1 + t - 2 + 4t - 2 = 0 \\ &\iff 21t = 5 \\ &\iff t = \frac{5}{21} \end{aligned}$$

Le point K est donc le point de paramètre $t = \frac{5}{21}$ dans la représentation paramétrique de d , soit le point de coordonnées :

$$\left(\frac{20}{21}; \frac{16}{21}; \frac{11}{21} \right)$$

On a alors :

$$HK = \sqrt{\left(0 - \frac{20}{21}\right)^2 + \left(1 - \frac{16}{21}\right)^2 + \left(1 - \frac{11}{21}\right)^2} = \sqrt{\frac{400 + 25 + 100}{21^2}} = \sqrt{\frac{525}{21^2}} = \frac{5\sqrt{21}}{21}$$

Et comme la distance du point H au plan (FIJ) est la distance entre le point H et son projeté orthogonal sur le plan (FIJ) , cette distance est :

$$\boxed{HK = \frac{5\sqrt{21}}{21}}$$

(e) En choisissant pour base le triangle FIJ , la hauteur correspondante est la longueur HK . Le volume du tétraèdre $HFIJ$ est alors :

$$\mathcal{V}_{HFIJ} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{FIJ} \times HK = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{8} \times \frac{5\sqrt{21}}{21} = \frac{5}{24}$$

Le volume du tétraèdre $HFIJ$ est donc :

$$\boxed{\mathcal{V}_{HFIJ} = \frac{5}{24}}$$

Commentaires

- Dans la question 2a, on aurait pu utiliser deux autres vecteurs non colinéaires du plan (*IJF*) comme par exemple $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$.

Exercice 2

Énoncé

(5 points)

La partie *C* est indépendante des parties *A* et *B*.

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.

Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égale à $\frac{1}{3}$.

S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite lors du déplacement suivant est égale à $\frac{3}{4}$.

S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche lors du déplacement suivant est égale à $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

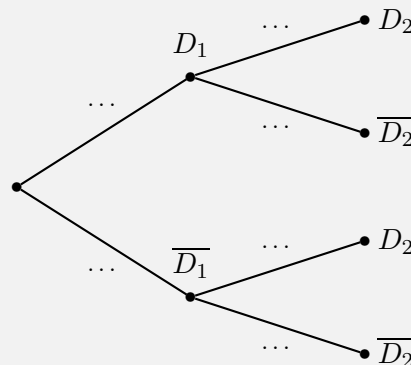
- D_n l'événement : « le robot se déplace à droite lors du n -ième déplacement » ;
- $\overline{D_n}$ l'événement contraire de D_n ;
- p_n la probabilité de l'événement D_n .

On a donc $p_1 = \frac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



- Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.
- Montrer que $p_2 = \frac{7}{12}$.
- Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement. Quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement ?

Partie B : étude de la suite (p_n)

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

On pourra s'aider d'un arbre.

- 2.(a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$.
 (b) La suite (p_n) est-elle convergente ? Justifier.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = p_n - \frac{2}{3}$.
 (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
 (b) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

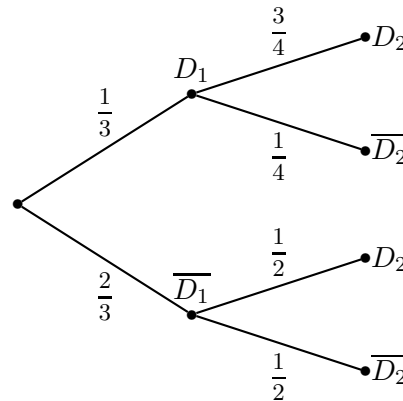
Partie C

Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\frac{3}{4}$. Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

Correction

Partie A

1. On complète l'arbre de la façon suivante :



2. Il s'agit de calculer $P(D_1 \cap D_2)$:

$$\begin{aligned} P(D_1 \cap D_2) &= P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

La probabilité que le robot se déplace deux fois à droite est donc :

$$\boxed{P(D_1 \cap D_2) = \frac{1}{4}}$$

3. Les événements D_1 et $\overline{D_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D_2) &= P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) + P(\overline{D_1}) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{p_2 = \frac{7}{12}}$$

4. Il s'agit de calculer $P_{\overline{D_2}}(D_1)$:

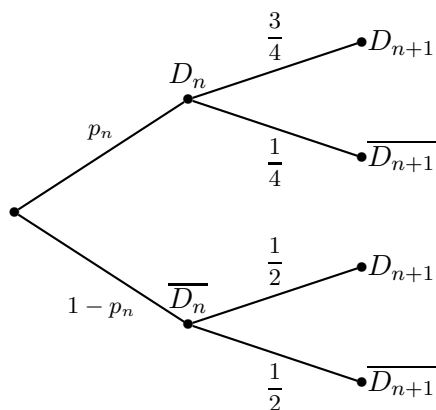
$$\begin{aligned}
 P_{\overline{D_2}}(D_1) &= \frac{P(D_1 \cap \overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\
 &= \frac{P(D_1) \times P_{D_1}(\overline{D_2})}{P(\overline{D_2})} \\
 &= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} \\
 &= \frac{1}{12} \times \frac{12}{5} \\
 &= \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

La probabilité que le robot se soit déplacé à droite lors du premier déplacement sachant qu'il s'est déplacé à gauche lors du deuxième est donc :

$$P_{\overline{D_2}}(D_1) = \frac{1}{5}$$

Partie B

1. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Les événements D_n et $\overline{D_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(D_{n+1}) &= P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) \\
 &= p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n \\
 &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Soit :

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

2.(a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$.

• **Initialisation :**

Pour $n = 1$, on a $p_1 = \frac{1}{3}$ et $p_2 = \frac{7}{12}$. On a donc bien $p_1 \leq p_2 < \frac{2}{3}$ et la propriété est vraie au rang $n = 1$.

• **Hérédité :**

Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$. On a alors, en multipliant par $\frac{1}{4}$ qui est positif :

$$\frac{1}{4}p_n \leq \frac{1}{4}p_{n+1} < \frac{1}{6}$$

Puis en ajoutant $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}p_{n+1} + \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

Soit :

$$p_{n+1} \leq p_{n+2} < \frac{2}{3}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion :**

La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
On a donc, pour tout $n \geq 1$:

$$p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$$

(b) La suite (p_n) est :

- croissante (car $p_n \leq p_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)
- majorée (car $p_n < \frac{2}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

On en déduit que :

La suite (p_n) est convergente

3.(a) Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{4}u_n \end{aligned}$$

Et comme $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$, on en déduit que :

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_0 = -\frac{1}{3}$

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = u_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, soit :

$$u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Et comme $u_n = p_n - \frac{2}{3}$, on a $p_n = u_n + \frac{2}{3}$, soit :

$$p_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$$

Or $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{2}{3}}$$

Cela signifie, qu'à long terme, la probabilité que le robot se déplace à droite, pour un déplacement donné, sera proche de $\frac{2}{3}$.

Partie C

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de déplacements vers la droite sur les 10 déplacements. Comme on répète 10 fois une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (le robot se déplace vers la droite) est égale à $\frac{3}{4}$, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$. De plus, le robot revient à son point de départ si et seulement si il effectue exactement 5 déplacements vers la droite. On obtient alors, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité que le robot revienne à son point de départ au bout des dix déplacements est :

$$\boxed{P(X = 5) \approx 0,058}$$

Commentaires

- Dans la question 3a, pour montrer que la suite (u_n) est géométrique, on aurait également pu utiliser la relation $u_n = p_n - \frac{2}{3}$ d'où $p_n = u_n + \frac{2}{3}$ et on aurait présenté le calcul de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{4}u_n \end{aligned}$$

- Dans la question 3b, pour déterminer la limite de la suite (p_n) , comme on avait déjà montré que la suite était convergente, on pouvait utiliser le fait que la limite l était un point fixe, c'est-à-dire une solution de l'équation $x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$. Il suffit alors de résoudre cette équation :

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} &\iff \frac{3}{4}x = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \\ &\iff x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On retrouve bien que la suite (p_n) converge vers $\frac{2}{3}$.

- Dans la partie C, on pouvait utiliser la formule :

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

Exercice 3

Énoncé

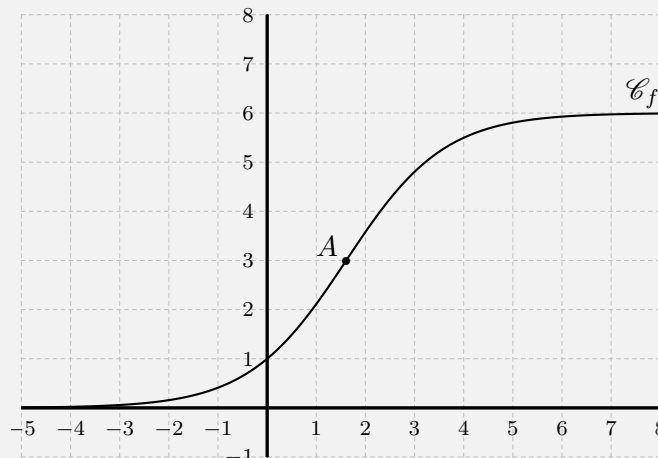
(5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1 + 5e^{-x}}$$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f .



1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln(5); 3)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- 3.(a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2}$$

- (b) En déduire le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que :

- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f'' sa dérivée seconde ;
- pour tout réel x :

$$f''(x) = \frac{30e^{-x}(5e^{-x} - 1)}{(1 + 5e^{-x})^3}$$

- (a) Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion.
- (b) Justifier que pour tout réel x appartenant à $]-\infty; \ln(5)]$, on a : $f(x) \geq \frac{5}{6}x + 1$.

5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k \ln(e^x + 5)$, où k est une constante réelle.

- Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- En déduire que l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln(5)$ est égale à $6 \ln\left(\frac{5}{3}\right)$.

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' = y - \frac{1}{6}y^2$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}u(x)^2$$

- Montrer que la fonction f définie dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E).
- Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.
- On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{g(x)}$. On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h .
 - Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.
 - Pour tout réel positif m , on considère la fonction g_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = \frac{6}{1 + 6me^{-x}}$$

Montrer que pour tout réel positif m , la fonction g_m est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

Correction

Partie A

1. On a :

$$f(\ln(5)) = \frac{6}{1 + 5e^{-\ln(5)}} = \frac{6}{1 + 5 \times \frac{1}{e^{\ln(5)}}} = \frac{6}{1 + \frac{5}{5}} = \frac{6}{1 + 1} = \frac{6}{2} = 3$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point } A(\ln(5); 3) \text{ appartient à la courbe } \mathcal{C}_f}$$

2. On a :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6} \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

3.(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{6 \times (-5e^{-x})}{(1 + 5e^{-x})^2} \\ &= \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2} \end{aligned}$$

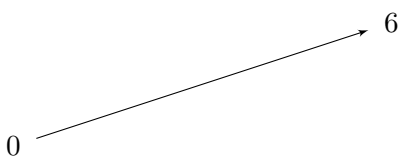
Soit :

$$f'(x) = \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2}$$

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = +\infty$$

On a donc le tableau :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

4.(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $30e^{-x} > 0$ et $(1 + 5e^{-x})^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $5e^{-x} - 1$. Or :

$$\begin{aligned} 5e^{-x} - 1 \geq 0 &\iff 5e^{-x} \geq 1 \\ &\iff e^{-x} \geq \frac{1}{5} \\ &\iff -x \geq \ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\iff x \leq -\ln\left(\frac{1}{5}\right) \\ &\iff x \leq \ln(5) \end{aligned}$$

On en déduit le tableau :

x	$-\infty$	$\ln(5)$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
f	convexe		concave

En $\ln(5)$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe donc :

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet A pour point d'inflexion

(b) Déterminons une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0. On a $f(0) = \frac{6}{1+5} = 1$

et $f'(0) = \frac{30}{6^2} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = \frac{5}{6}(x - 0) + 1$, soit :

$$y = \frac{5}{6}x + 1$$

Et comme la fonction f est convexe sur $] -\infty ; \ln(5)]$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangente sur cet intervalle. En particulier, elle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0 d'où, pour tout $x \in] -\infty ; \ln(5)]$:

$$f(x) \geq \frac{5}{6}x + 1$$

5.(a) La fonction F_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'_k(x) = \frac{ke^x}{e^x + 5} = \frac{k}{e^{-x}(e^x + 5)} = \frac{k}{1 + 5e^{-x}}$$

On en déduit que F_k est une primitive de f si et seulement si :

$$k = 6$$

(b) Il s'agit de calculer $\int_0^{\ln(5)} f(x) dx$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(5)} f(x) dx &= \left[6 \ln(e^x + 5) \right]_0^{\ln(5)} \\ &= 6 \ln(e^{\ln(5)} + 5) - 6 \ln(e^0 + 5) \\ &= 6 \ln(5 + 5) - 6 \ln(1 + 5) \\ &= 6 (\ln(10) - \ln(6)) \\ &= 6 \ln\left(\frac{10}{6}\right) \\ &= 6 \ln\left(\frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

L'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln(5)$ est donc :

$$\int_0^{\ln(5)} f(x) dx = 6 \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

Partie B

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{1}{6} (f(x))^2 &= \frac{6}{1 + 5e^{-x}} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{6}{1 + 5e^{-x}} \right)^2 \\ &= \frac{6}{1 + 5e^{-x}} - \frac{6^2}{6(1 + 5e^{-x})^2} \\ &= \frac{6(1 + 5e^{-x})}{(1 + 5e^{-x})^2} - \frac{6}{(1 + 5e^{-x})^2} \\ &= \frac{6 + 30e^{-x} - 6}{(1 + 5e^{-x})^2} \\ &= \frac{30e^{-x}}{(1 + 5e^{-x})^2} \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) - \frac{1}{6} (f(x))^2$. On a montré que :

$$f \text{ est solution de l'équation différentielle (E)}$$

2. Résolvons l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.

- L'équation homogène associée $y' = -y$ admet pour solutions les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{-x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

- L'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$ admet pour solution particulière constante la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{6}$$

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$ sont donc les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{-x} + \frac{1}{6} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

3.(a) Supposons que h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$$

Or, on a $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ donc $h'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$ d'où :

$$-\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{6}$$

D'où, en multipliant par $g(x)^2$:

$$-g'(x) = -g(x) + \frac{1}{6}g(x)^2$$

Soit :

$$g'(x) = g(x) - \frac{1}{6}g(x)^2$$

Et donc :

$$g \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = y - \frac{1}{6}y^2$$

(b) La fonction g_m est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc elle ne s'annule pas. Posons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h_m(x) = \frac{1}{g_m(x)} = \frac{1 + 6me^{-x}}{6} = me^{-x} + \frac{1}{6}$$

D'après la question 2, la fonction h_m est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$ donc, d'après la question 3a :

$$\text{La fonction } g_m \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = y - \frac{1}{6}y^2$$

Commentaires

- Pour la dernière question, on aurait pu montrer que g_m était solution de l'équation différentielle de manière « brutale » mais, étant donné la configuration de l'énoncé, il était attendu (également plus rapide et plus élégant) d'utiliser les questions précédentes.

Exercice 4

Énoncé

(5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère le script écrit en langage Python ci-dessous.

```
def seuil(S) :
    n = 0
    u = 7
    while u < S :
        n = n + 1
        u = 1.05*u + 3
    return(n)
```

Affirmation 1 : l'instruction `seuil(100)` renvoie la valeur 18.

2. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} \cdots + \frac{1}{5^n}$.

Affirmation 2 : la suite (S_n) converge vers $\frac{5}{4}$.

3. **Affirmation 3 :** dans une classe composée de 30 élèves, on peut former 870 binômes de délégués différents.

4. On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = x(\ln(x))^2$.

Affirmation 4 : l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1; +\infty[$.

5. **Affirmation 5 :**

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$$

Correction

1. **Affirmation 1 : Vrai**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,05u_n + 3$. La fonction `seuil(S)` renvoie la valeur du plus petit entier n tel que $u_n \geq S$. Or, on obtient à l'aide de la calculatrice :

- $u_{17} \approx 93,6 < 100$
- $u_{18} \approx 101,2 > 100$

Le plus petit entier tel que $u_n \geq 100$ est donc 18.

2. **Affirmation 2 : Vrai**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{5}$. On a donc :

$$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right)$$

Or $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{5}{4}$.

3. **Affirmation 3 : Faux**

Il s'agit de déterminer le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 30 :

$$\binom{30}{2} = \frac{30!}{2! \times (30-2)!} = \frac{30!}{2! \times 28!} = \frac{29 \times 30}{2} = 435$$

On peut donc former 435 binômes de délégués différents.

4. Affirmation 4 : Vrai

La fonction f est dérivable sur $[1; +\infty[$ et pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (\ln(x))^2 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \\ &= (\ln(x))^2 + 2 \ln(x) \\ &= \ln(x) (\ln(x) + 2) \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, $\ln(x) \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$. De plus, sur l'intervalle $]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$. On en déduit que, sur l'intervalle $[1; +\infty[$, f est continue et strictement croissante. De plus $f(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Or $1 \in [0; +\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[1; +\infty[$.

5. Affirmation 5 : Vrai

Pour tout $x \in [0; 1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-x} dx &= \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + \left[-e^{-x} \right]_0^1 \\ &= -e^{-1} - e^{-1} + 1 \\ &= 1 - 2e^{-1} \\ &= 1 - \frac{2}{e} \\ &= \frac{e - 2}{e} \end{aligned}$$

Commentaires

- Pour la question 2, on rappelle la formule donnant la somme S des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$