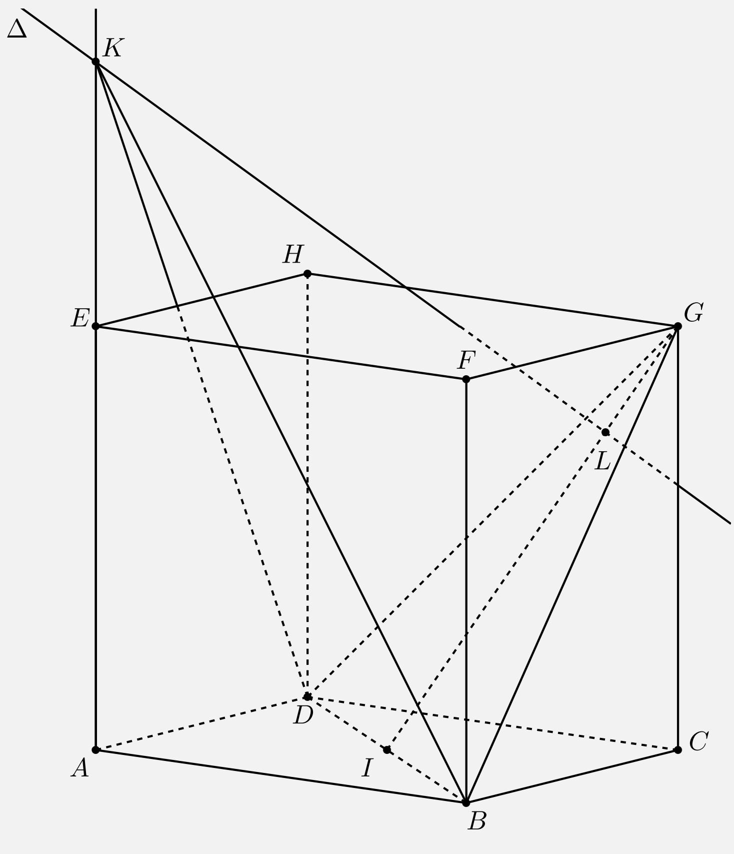
MÉTROPOLE - 11 SEPTEMBRE 2024 (REMPLACEMENT)

Exercice 1

Énoncé **(6 points)**

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.



Le point I est le milieu du segment $[BD]$. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1.(a) Préciser les coordonnées des points D, B, I et G. Aucune justification n'est attendue.

(b) Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8} ; \frac{7}{8} ; \frac{3}{4}\right)$.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

(a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{8} + t \\ y = \dfrac{7}{8} + t \\ z = \dfrac{3}{4} - t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

(b) Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{13}{8}\right)$.

(c) Que représente le point L pour le point K ? Justifier la réponse.

4. (a) Calculer la distance KL.

(b) On admet que le triangle DBG est équilatéral. Montrer que son aire est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) En déduire le volume du tétraèdre $KDBG$.
On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base ;
- un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,a)$.

(a) Exprimer le volume $\mathscr{V}_a$ de la pyramide $ABCDK_a$ en fonction de a.

(b) On note Δ_a la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t' + a \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG). Montrer que les coordonnées du point L_a sont $\left(\dfrac{a+1}{3}\,;\,\dfrac{a+1}{3}\,;\,\dfrac{2a-1}{3}\right)$.

(c) Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre $GBDK_a$ et la pyramide $ABCDK_a$ soient de même volume.

Correction

1. (a) On a :

$$\boxed{D(0\,;\,1\,;\,0)} \qquad \boxed{B(1\,;\,0\,;\,0)} \qquad \boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)} \qquad \boxed{G(1\,;\,1\,;\,1)}$$

(b) Soit $(x_L\,;\,y_L\,;\,z_L)$, on a $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} \\ 1-\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{IG}\begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix} x_L-\frac{1}{2} \\ y_L-\frac{1}{2} \\ z_L \end{pmatrix}$

d'où :

$$\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG} \iff \begin{cases} x_L - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8} \\ y_L - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8} \\ z_L = \dfrac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x_L = \dfrac{7}{8} \\ y_L = \dfrac{7}{8} \\ z_L = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{L\left(\frac{7}{8}\,;\,\frac{7}{8}\,;\,\frac{3}{4}\right)}$$

2. Il suffit de vérifier que les coordonnées des points B, D et G vérifient l'équation donnée.
   - $1+0-0-1=0$ donc les coordonnées de B vérifient l'équation.
   - $0+1-0-1=0$ donc les coordonnées de D vérifient l'équation.
   - $1+1-1-1=0$ donc les coordonnées de G vérifient l'équation.

   Les coordonnées des trois points vérifient l'équation donc une équation du plan (BDG) est :

$$\boxed{x+y-z-1=0}$$

3.(a) D'après son équation cartésienne, le plan (BDG) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et comme la droite Δ est perpendiculaire au plan (BDG), elle admet le vecteur $\overrightarrow{n}$ pour vecteur directeur. De plus, elle passe par le point $L\left(\frac{7}{8}\,;\,\frac{7}{8}\,;\,\frac{3}{4}\right)$. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x=\frac{7}{8}+t \\ y=\frac{7}{8}+t \\ z=\frac{3}{4}-t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}.}$$

(b) Le point $K\left(0\,;\,0\,;\,\frac{13}{8}\right)$ appartient évidemment à l'axe (AE). Il appartient également à la droite Δ car c'est le point de paramètre $t=-\frac{7}{8}$ dans la représentation paramétrique précédente. Le point K appartient donc à la fois à la droite (AE) et à la droite Δ et, comme ces droites ne sont pas confondues, on en déduit que :

$$\boxed{\text{les droites } \Delta \text{ et } (AE) \text{ sont sécantes au point } K \text{ de coordonnées } \left(0\,;\,0\,;\,\frac{13}{8}\right)}$$

(c) Le point L est le point d'intersection du plan (BDG) et de la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par K. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point } L \text{ est le projeté orthogonal du point } K \text{ sur le plan } (BDG)}$$

4.(a) On a :

$$\begin{aligned} KL &= \sqrt{\left(\frac{7}{8}-0\right)^2+\left(\frac{7}{8}-0\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{13}{8}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(-\frac{7}{8}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{49}{64}+\frac{49}{64}+\frac{49}{64}} \\ &= \sqrt{\frac{147}{64}} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{KL=\frac{7\sqrt{3}}{8}}$$

(b) Le triangle DBG étant équilatéral, le pied de la hauteur issue de G est le point I, son aire est donc $\mathscr{A}_{GBD} = \dfrac{BD \times GI}{2}$. Or on a :

$$BD = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad GI = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

D'où :

$$\mathscr{A}_{GBD} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'aire du triangle BDG est donc bien :

$$\boxed{\mathscr{A}_{GBD} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(c) Le volume du tétraèdre $KDBG$ est donc :

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{GBD} \times KL = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{7\sqrt{3}}{8} = \frac{7}{16}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{V} = \frac{7}{16}}$$

5.(a) La pyramide $ABCDK_a$ est une pyramide à base carrée, dont la base est le carré $ABCD$ d'aire égale à 1 et la hauteur est $AK_a = a$. Son volume est donc :

$$\boxed{\mathscr{V}_a = \frac{1}{3}a}$$

(b) Déterminons les coordonnées du point L_a, intersection du plan (BDG) et de la droite Δ_a. On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de Δ_a dans l'équation cartésienne du plan (BDG) :

$$\begin{aligned} t' + t' - (-t' + a) - 1 = 0 &\iff t' + t' + t' - a - 1 = 0 \\ &\iff 3t' = a + 1 \\ &\iff t' = \frac{a+1}{3} \end{aligned}$$

Le point L_a est donc le point de paramètre $t' = \dfrac{a+1}{3}$, soit le point de coordonnées $\left(\dfrac{a+1}{3}\,;\,\dfrac{a+1}{3}\,;\,-\dfrac{a+1}{3}+a\right)$, d'où :

$$\boxed{L_a\left(\frac{a+1}{3}\,;\,\frac{a+1}{3}\,;\,\frac{2a-1}{3}\right)}$$

(c) On peut remarquer que la droite Δ_a est la droite perpendiculaire au plan (BDG) passant par K_a. Le point L_a est donc le projeté orthogonal de K_a sur (BDG). Le volume du tétraèdre $GBDK_a$ est donc :

$$\mathscr{V}_{GBDK_a} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{GBD} \times K_aL_a$$

Or :

$$
\begin{aligned}
K_aL_a &= \sqrt{\left(\frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a-1}{3} - a\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-a-1}{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{3 \times \left(\frac{a+1}{3}\right)^2} \\
&= \frac{(a+1)\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}
$$

Et donc :

$$\mathscr{V}_{GBDK_a} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{(a+1)\sqrt{3}}{3} = \frac{a+1}{6}$$

On a alors :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{V}_{GBDK_a} = \mathscr{V}_a &\iff \frac{a+1}{6} = \frac{1}{3}a \\
&\iff 2a = a+1 \\
&\iff a = 1
\end{aligned}
$$

Le tétraèdre $GBDK_a$ et la pyramide $ABCDK_a$ sont donc de même volume si et seulement si :

$$\boxed{a = 1}$$

Commentaires

- Dans la question 5b, les coordonnées du point étant données, on pouvait également vérifier que ces coordonnées vérifiaient à la fois l'équation du plan et le système d'équations paramétriques de la droite.

Exercice 2

Énoncé **(5 points)**

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montagne locale comme représenté en Figure 1. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 cm (Figure 2).

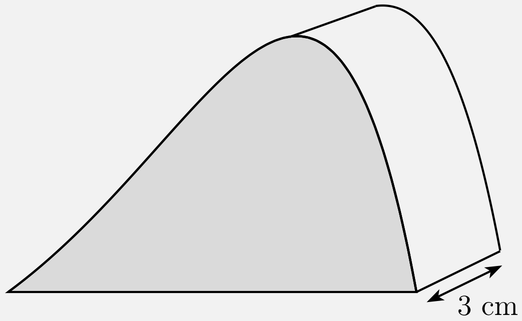


Figure 1

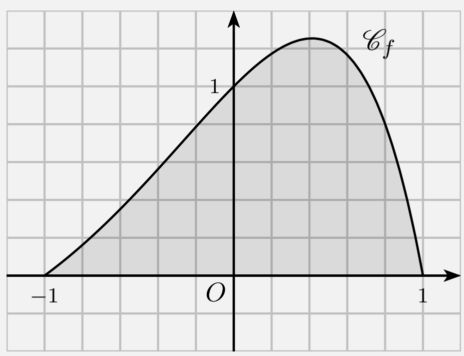


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par :

$$f(x) = (1-x^2)\mathrm{e}^x$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1.(a) Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.

(b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

2. Le volume $\mathscr{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathscr{V} = 3 \times S$$

où S est l'aire, en cm^3, de la surface colorée (Figure 2).
En déduire que ce volume $\mathscr{V}$, arrondi à 0,1 cm^3 près, est égal à 4,4 cm^3

Partie B
On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.
Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0{,}01\,;\,+\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2(2-3\ln(q)) - 3$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.
On admet que la fonction B est dérivable sur $[0{,}01\,;\,+\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1.(a) Déterminer $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q)$.

(b) Montrer que, pour tout $q \geqslant 0{,}01$, $B'(q) = 8q(1-6\ln(q))$.

(c) Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0{,}01\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.

(d) Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2.(a) Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1{,}2\,;\,+\infty[$. Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

(b) On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0{,}01\,;\,1{,}2]$. On donne $\alpha \approx 0{,}757$. En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

Correction
Partie A

1.(a) Le polynôme $1-x^2$ admet pour racines -1 et 1 et il est positif à l'intérieur de l'intervalle des racines. On a donc, pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, $1-x^2 \geqslant 0$. Et comme $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $x \in [-1\,;\,1]$:

$$\boxed{f(x) \geqslant 0}$$

(b) Pour tout $x \in [-1\,;\,1]$, posons :

$$\begin{cases} u(x) = 1-x^2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = -2x \\ v(x) = \mathrm{e}^x \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \Big[(1-x^2)\mathrm{e}^x\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= (1-1)\mathrm{e}^1 - (1-1)\mathrm{e}^{-1} + \int_{-1}^{1} 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}$$

2. L'aire S est égale à l'intégrale précédente. Calculons l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties. Posons :

$$\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=\mathrm{e}^x\end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=\mathrm{e}^x\end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \Big[x\mathrm{e}^x\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^1+\mathrm{e}^{-1} - \Big[\mathrm{e}^x\Big]_{-1}^{1} \\ &= \mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1} - (\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}) \\ &= 2\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

On a alors :

$$\mathscr{V} = 3\times S = 3\times 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 12\mathrm{e}^{-1}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{V}\approx 4{,}4\ \text{cm}^3}$$

Partie B

1.(a) On a :

$$\boxed{\lim_{q\to+\infty} B(q) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases}\displaystyle\lim_{q\to+\infty}(8q^2)=+\infty\\ \displaystyle\lim_{q\to+\infty}(2-3\ln(q))=-\infty\end{cases}$$

(b) La fonction B est dérivable sur $[0{,}01\,;\,+\infty[$ et, pour tout $q\in[0{,}01\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned}B'(q) &= 16q(2-3\ln(q)) + 8q^2\times\left(-\frac{3}{q}\right) \\ &= 16q(2-3\ln(q)) - 24q \\ &= 8q(4-6\ln(q)-3) \\ &= 8q(1-6\ln(q))\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{B'(q) = 8q(1-6\ln(q))}$$

(c) Pour tout $q \in [0{,}01\,;\,+\infty[$, $q > 0$ donc $B'(q)$ est du signe de $1 - 6\ln(q)$. On a :

$$\begin{aligned} 1 - 6\ln(q) \geqslant 0 &\iff 6\ln(q) \leqslant 1 \\ &\iff \ln(q) \leqslant \frac{1}{6} \\ &\iff q \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

On a alors la tableau :

q	$0{,}01$		$\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$		$+\infty$
$B'(q)$		$+$	0	$-$	
$B(q)$	$B(0{,}01)$	$\nearrow$	$B\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} B(0{,}01) &= 0{,}0008(2 - 3\ln(0{,}01)) - 3 \\ &= 0{,}0024\ln(100) - 2{,}9984 \\ &\approx -2{,}9873 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} B\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}\right) &= 8\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}(2 - 3\ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{6}})) - 3 \\ &= 8\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}\left(2 - 3 \times \frac{1}{6}\right) - 3 \\ &= 12\mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - 3 \\ &\approx 13{,}7 \end{aligned}$$

(d) Le bénéfice est maximal pour $q = \mathrm{e}^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}18$ (soit environ 118 bonbons) et ce bénéfice, en dizaine d'euros, est égal à $12\mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - 3 \approx 13{,}7$, soit environ :

$$\boxed{137 \text{ euros}}$$

2.(a) On peut remarquer que $1{,}2 > \mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$. Sur l'intervalle $[1{,}2\,;\,+\infty[$, la fonction B est continue et strictement décroissante. De plus $B(1{,}2) \approx 13{,}7$ et $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q) = -\infty$. Or $10 \in\,]-\infty\,;\,B(1{,}2)]$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1{,}2\,;\,+\infty[$. Et on a :

- $B(1{,}558) \approx 10{,}007 > 10$
- $B(1{,}559) \approx 9{,}986 < 10$

On en déduit que :

$$\boxed{1{,}558 < \beta < 1{,}559}$$

(b) En utilisant le sens de variation de B et le fait que l'équation $B(q) = 10$ admet pour solutions α et β, on en déduit que l'inéquation $B(q) \geqslant 10$ admet pour ensemble solution l'intervalle $[\alpha\,;\,\beta]$. Le bénéfice est donc supérieur à 100 euros lorsqu'il vend :

$$\boxed{\text{Entre 78 et 155 bonbons}}$$

Commentaires

- Dans le tableau de variations d'une fonction f, lorsque la valeur exacte de l'image en un point x_0 est trop « compliquée », il est préférable d'écrire $f(x_0)$ dans le tableau et de donner la valeur exacte (et éventuellement une valeur approchée) à la suite du tableau.

Exercice 3

Énoncé **(5 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les cinq questions sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence, pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = -0{,}8t_n + 18$.
   Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.
2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :
   $$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4$$
   La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \dfrac{S_n}{n}$.
   Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{v_n}$.
   Affirmation 3 : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n+1}{n}$.
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^n - n$.
   Affirmation 4 : la suite (u_n) converge.
5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```python
def u(n) :
    valeur = 2
    for k in range(n) :
        valeur = 0.5*(valeur+2/valeur)
    return valeur
```

   On admet que la suite (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :
   $$\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$$
   Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Correction

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= t_{n+1} - 10 \\ &= -0{,}8t_n + 18 - 10 \\ &= -0{,}8t_n + 8 \\ &= -0{,}8(t_n - 10) \\ &= -0{,}8w_n \end{aligned}$$

   La suite (w_n) est donc géométrique de raison $-0{,}8$.

2. **Affirmation 2 : Vrai**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a, en multipliant par $\dfrac{1}{n}$ qui est positif :

$$\frac{3n-4}{n} \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant \frac{3n+4}{n}$$

   Soit :

$$3 - \frac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \frac{4}{n}$$

   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(3 - \frac{4}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3 + \frac{4}{n}\right) = 3$ donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge vers 3.

3. **Affirmation 3 : Vrai**

   - **Initialisation :**
     Pour $n = 1$, on a d'une part $u_1 = 2$ et d'autre part $\dfrac{1+1}{1} = 2$. La propriété est donc vraie au rang $n = 1$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $v_n = \dfrac{n+1}{n}$, on a alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2 - \frac{1}{v_n} \\ &= 2 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} \quad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= 2 - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{2n+2-n}{n+1} \\ &= \frac{n+2}{n+1} \end{aligned}$$

     La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
   - **Conclusion :**
     La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$.

4. **Affirmation 4 : Faux**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \mathrm{e}^n - n = n\left(\frac{\mathrm{e}^n}{n} - 1\right)$$

   Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^n}{n} = +\infty$ donc la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

5. **Affirmation 5 : Vrai**
La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, on en déduit qu'elle est convergente vers une limite l. De plus, cette suite est définie par la relation $u_{n+1} = 0{,}5\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$, c'est-à-dire par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = 0{,}5\left(x + \dfrac{2}{x}\right)$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^*$, on sait que l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 0{,}5\left(x + \frac{2}{x}\right) = x \\ &\iff x + \frac{2}{x} = 2x \\ &\iff x - \frac{2}{x} = 0 \\ &\iff \frac{x^2 - 2}{x} = 0 \\ &\iff x^2 = 2 \\ &\iff x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Et comme $\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2$, la suite (u_n) ne peut pas converger vers $-\sqrt{2}$, elle converge donc vers $\sqrt{2}$.

Commentaires

- Dans le calcul de l'affirmation 1, on aurait également pu remarquer que $t_n = w_n + 10$ et présenter de la façon suivante :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= t_{n+1} - 10 \\ &= -0{,}8t_n + 18 - 10 \\ &= -0{,}8t_n + 8 \\ &= -0{,}8(w_n + 10) + 8 \\ &= -0{,}8w_n - 8 + 8 \\ &= -0{,}8w_n \end{aligned}$$

Exercice 4

Énoncé **(4 points)**

Les deux parties sont indépendantes.

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A
Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.
On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. *On arrondira les résultats à 10^{-3} près.*
   (a) Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes.

(b) Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.

4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».
Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère ? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i, pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i-ème cachet prélevé.
On considère la variable aléatoire S définie par :

$$S = M_1 + M_2 + \cdots + M_{100}$$

On admet que les variables aléatoires M_1, M_2, ..., M_{100} suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ.

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note s l'écart-type de la variable aléatoire S. Montrer que $s = 10\sigma$.
3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.
   (a) Montrer que cette condition est équivalente à :

$$P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 0{,}1$$

   (b) En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.

Correction
Partie A

1. On répète 100 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (choisir un cachet non conforme) est égale à 0,02. La variable aléatoire N compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{N \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 100 \text{ et } p = 0{,}02}$$

2. L'espérance de N est donnée par la formule $E(N) = n \times p = 100 \times 0{,}02 = 2$, soit :

$$\boxed{E(N) = 2}$$

Cela signifie qu'en moyenne, il y aura 2 cachets non conformes par boîte.

3.(a) Il s'agit de calculer $P(N = 3)$. On obtient, à l'aide da la calculatrice, que la probabilité qu'une boîte contienne exactement 3 cachets non conformes est :

$$\boxed{P(N = 3) \approx 0{,}182}$$

(b) Contenir au moins 95 cachets conforme revient à contenir au plus 5 cachets non conformes. Il s'agit donc de calculer $P(N \leqslant 5)$. On obtient, à l'aide da la calculatrice, que la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes :

$$\boxed{P(N \leqslant 5) \approx 0{,}985}$$

4. Soit n le nombre de cachets par boîtes et X la variable aléatoire égale au nombre de cachets non conformes dans une boîte. La variable aléatoire suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}02$. La probabilité que la boîte ne contienne que des cachets conformes est $P(X = 0) = 0{,}98^n$. On a alors :

$$\begin{aligned} P(X = 0) \geqslant 0{,}5 &\iff 0{,}98^n \geqslant 0{,}5 \\ &\iff \ln\left(0{,}98^n\right) \geqslant \ln(0{,}5) \\ &\iff n \ln(0{,}98) \geqslant \ln(0{,}5) \\ &\iff n \leqslant \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)} \quad (\textit{car } \ln(0{,}98) < 0) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}98)} \approx 34{,}3$ donc le nombre maximal de cachets par boîte pour qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes avec une probabilité supérieure à 0,5 est :

$$\boxed{n = 34}$$

Partie B

1. La variable aléatoire S étant la somme de 100 variables aléatoires indépendantes suivant la même loi d'espérance $\mu = 2$, on sait que $E(S) = 100 \times 2 = 200$, soit :

$$\boxed{E(S) = 200}$$

Cela signifie, qu'en moyenne, la masse totale des cahcets d'une boîte sera égale à 200 grammes.

2. La variable aléatoire S étant la somme de 100 variables aléatoires indépendantes suivant la même loi d'écart-type σ, on sait que son écart-type est $s = \sqrt{100} \times \sigma = 10\sigma$, soit :

$$\boxed{s = 10\sigma}$$

3.(a) On souhaite que $P(199 < S < 201) \geqslant 0{,}9$. Or :

$$\begin{aligned} P(199 < S < 201) \geqslant 0{,}9 &\iff P(|S - 200| < 1) \geqslant 0{,}9 \\ &\iff P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 0{,}1 \quad (\textit{par passage à l'événement contraire}) \end{aligned}$$

Cette condition est donc bien équivalente à :

$$\boxed{P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 0{,}1}$$

(b) On sait que $E(S) = 200$ et $V(S) = 100\sigma^2$, on a alors, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\delta > 0$:

$$P(|S - E(S)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(S)}{\delta^2}$$

Soit, en prenant $\delta = 1$:

$$P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 100\sigma^2$$

Afin d'assurer la condition, il suffit que $100\sigma^2 \leqslant 0{,}1$ d'où $\sigma^2 \leqslant \dfrac{0{,}1}{100} = 0{,}001$ et donc $\sigma = \sqrt{0{,}001}$. La valeur maximale de σ est donc :

$$\boxed{\sigma = \sqrt{0{,}001} \approx 0{,}0316}$$

Commentaires

- Dans la question 3a, plutôt que d'utiliser directement la calculatrice, on aurait pu appliquer la formule :
$$P(X=3)=\binom{100}{3}\times 0{,}02^3\times 0{,}98^{97}\approx 0{,}182$$
- Dans la question 4, plutôt que d'utiliser la fonction ln pour résoudre l'inéquation, on pouvait procéder par balayage et remarquer que $0{,}98^{34}\approx 0{,}503>0{,}5$ et $0{,}98^{35}\approx 0{,}493<0{,}5$.