SUÈDE - 7 JUIN 2024

## Exercice 1

**Énoncé** **(4 points)**

*Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

**Affirmation 1 :** Soit $(E)$ l'équation différentielle $y' - 2y = -6x + 1$.
La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 6x + 1$ est une solution de l'équation différentielle $(E)$.

**Affirmation 2 :** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

La suite $(u_n)$ a pour limite $+\infty$.

**Affirmation 3 :** On considère la suite $(u_n)$ définie dans l'affirmation 2.
L'instruction `suite(50)` ci-dessous, écrite en langage Python, renvoie $u_{50}$.

```
def suite(k) :
   S = 0
   for i in range(k) :
      S = S + (3/4)**k
   return S
```

**Affirmation 4 :** Soit $a$ un réel et $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = a\ln(x) - 2x$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère $(0\,; \vec{i}, \vec{j})$.
Il existe une valeur de $a$ pour laquelle la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

**Correction**

- **Affirmation 1 : Faux**
La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 6$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} f'(x) - 2f(x) &= 2\mathrm{e}^{2x} - 6 - 2\left(\mathrm{e}^{2x} - 6x + 1\right) \\ &= 2\mathrm{e}^{2x} - 6 - 2\mathrm{e}^{2x} + 12x - 2 \\ &= 12x - 8 \end{aligned}$$

La fonction $f$ n'est donc pas solution de l'équation différentielle $y' - 2y = -6x + 1$.

- **Affirmation 2 : Faux**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est égal à la somme des terme d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{3}{4}$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} = 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

Or $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.

- **Affirmation 3 : Faux**
L'instruction `for i in range(k)` permet de faire varier `i` entre `0` et `k-1`. Si l'on souhaite faire varier `i` entre `0` et `k`, il faut donc utiliser `for i in range(k+1)`. De plus, il faut utiliser l'indice `i` dans la boucle et non `k` (qui ne varie pas). Une fonction correcte serait donc :

```
def suite(k) :
    S = 0
    for i in range(k+1) :
        S = S + (3/4)**i
    return S
```

- **Affirmation 4 : Vrai**
La fonction $f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{a}{x} - 2 \quad \text{et donc} \quad f'(1) = a - 2$$

On a alors, pour tout $x \in ]0\,;+\infty[$ :

$$\begin{aligned} f'(1) = 0 &\iff a - 2 = 0 \\ &\iff a = 2 \end{aligned}$$

On en déduit que pour $a = 2$, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

**Commentaires**

- La formule donnant la somme $S$ des premiers termes d'une suite géométrique de raison $q$ :

$$\boxed{S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}}$$

- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point est égal au nombre dérivée de la fonction en ce point. En particulier, une courbe admet une tangente horizontale en un point si et seulement si le nombre dérivé est nul en ce point.

# Exercice 2

**Énoncé** **(5 points)**

Au cours d'une séance, un joueur de volley-ball s'entraîne à faire des services. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,85.
On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- Si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à 0,6.
- Si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant est égale à 0,6.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $R_n$ l'événement « le joueur réussit le $n$-ième service » et $\overline{R_n}$ l'événement contraire.

**Partie A :**
On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

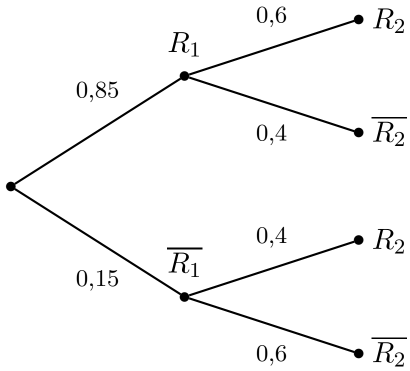
1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'événement $R_2$ est égale à 0,57.
3. Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.
4. Soit $Z$ la variable aléatoire égale au nombre de services réussis au cours des deux premiers services.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de $Z$ (on pourra utiliser l'arbre pondéré de la question 1).
   (b) Calculer l'espérance mathématiques $E(Z)$ de la variable aléatoire $Z$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**Partie B :**
On s'intéresse maintenant au cas général. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $x_n$ la probabilité de l'événement $R_n$.

1.(a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}})$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, on a : $x_{n+1} = 0{,}2x_n + 0{,}4$.
2. Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ non nul par $u_n = x_n - 0{,}5$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique.
   (b) Déterminer l'expression de $x_n$ en fonction de $n$. En déduire la limite de la suite $(x_n)$.
   (c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

**Correction**
**Partie A :**

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :




2. Les événements $R_1$ et $\overline{R_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités

totales :

$$\begin{aligned}
P(R_2) &= P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) + P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(R_2) \\
&= 0{,}85 \times 0{,}6 + 0{,}15 \times 0{,}4 \\
&= 0{,}57
\end{aligned}$$

La probabilité de l'événement $R_2$ est donc :

$$\boxed{P(R_2) = 0{,}57}$$

3. Il s'agit de calculer $P_{R_2}(\overline{R_1})$ :

$$\begin{aligned}
P_{R_2}(\overline{R_1}) &= \frac{P(\overline{R_1} \cap R_2)}{P(R_2)} \\
&= \frac{0{,}15 \times 0{,}4}{0{,}57} \\
&= \frac{2}{19}
\end{aligned}$$

Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, la probabilité qu'il ait raté le premier est :

$$\boxed{P_{R_2}(\overline{R_1}) = \frac{2}{19} \approx 0{,}1053}$$

4.(a) La variable aléatoire $Z$ peut prendre pour valeurs 0, 1 et 2 et on a :
- $P(Z = 0) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = 0{,}15 \times 0{,}6 = 0{,}09$
- $P(Z = 1) = P(R_1 \cap \overline{R_2}) + P(\overline{R_1} \cap R_2) = 0{,}85 \times 0{,}4 + 0{,}15 \times 0{,}4 = 0{,}4$
- $P(Z = 2) = P(R_1 \cap R_2)) = 0{,}85 \times 0{,}6 = 0{,}51$

La loi de probabilité de $Z$ est donc donnée dans le tableau suivants :

| $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(Z = k)$ | 0,09 | 0,4 | 0,51 |

(b) On a :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= 0 \times P(Z = 0) + 1 \times P(Z = 1) + 2 \times P(Z = 2) \\
&= 0 \times 0{,}09 + 1 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}51 \\
&= 1{,}42
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{E(Z) = 1{,}42}$$

Cela signifie, qu'en moyenne, sur les deux premiers services, le joueur en réussi 1,42.

**Partie B :**

1.(a) Lorsqu'il réussit le $n$-ième service, la probabilité qu'il réussisse le $n+1$-ième est égale à 0,6, soit :

$$\boxed{P_{R_n}(R_{n+1}) = 0{,}6}$$

Lorsqu'il ne réussit pas le $n$-ième service, la probabilité qu'il ne réussisse pas le $n+1$-ième est égale à 0,6, soit :

$$\boxed{P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}}) = 0{,}6}$$

(b) Les événements $R_n$ et $\overline{R_{n+1}}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R_{n+1}) &= P(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + P(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \\ &= x_n \times 0{,}6 + (1 - x_n) \times 0{,}4 \\ &= 0{,}6x_n + 0{,}4 - 0{,}4x_n \\ &= 0{,}2x_n + 0{,}4 \end{aligned}$$

Soit, pour tout entier naturel non nul $n$ :

$$\boxed{x_{n+1} = 0{,}2x_n + 0{,}4}$$

2.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= x_{n+1} - 0{,}5 \\ &= 0{,}2x_n + 0{,}4 - 0{,}5 \\ &= 0{,}2x_n - 0{,}1 \\ &= 0{,}2(x_n - 0{,}5) \\ &= 0{,}2u_n \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } 0{,}2 \text{ et de premier terme } u_1 = 0{,}85 - 0{,}5 = 0{,}35}$$

(b) On déduit de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times 0{,}2^{n+1}$, soit $u_n = 0{,}85 \times 0{,}2^{n-1}$. Et comme $u_n = x_n - 0{,}5$, $x_n = u_n + 0{,}5$, soit :

$$\boxed{x_n = 0{,}85 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}5}$$

On a $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(0{,}2^{n-1}\right) = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = 0{,}5}$$

(c) Cela signifie, qu'à long terme, la probabilité que le joueur réussisse un service se rapproche de 0,5.

**Commentaires**

- Dans la question , l'énoncé ne précise pas s'il faut arrondir le résultat. On peut donc supposer que c'est la valeur exacte qui est attendue, soit $\dfrac{2}{19}$. Personnelement, j'ai pour coutume d'arrondir les probabilités à $10^{-4}$ près, soit 0,1053.

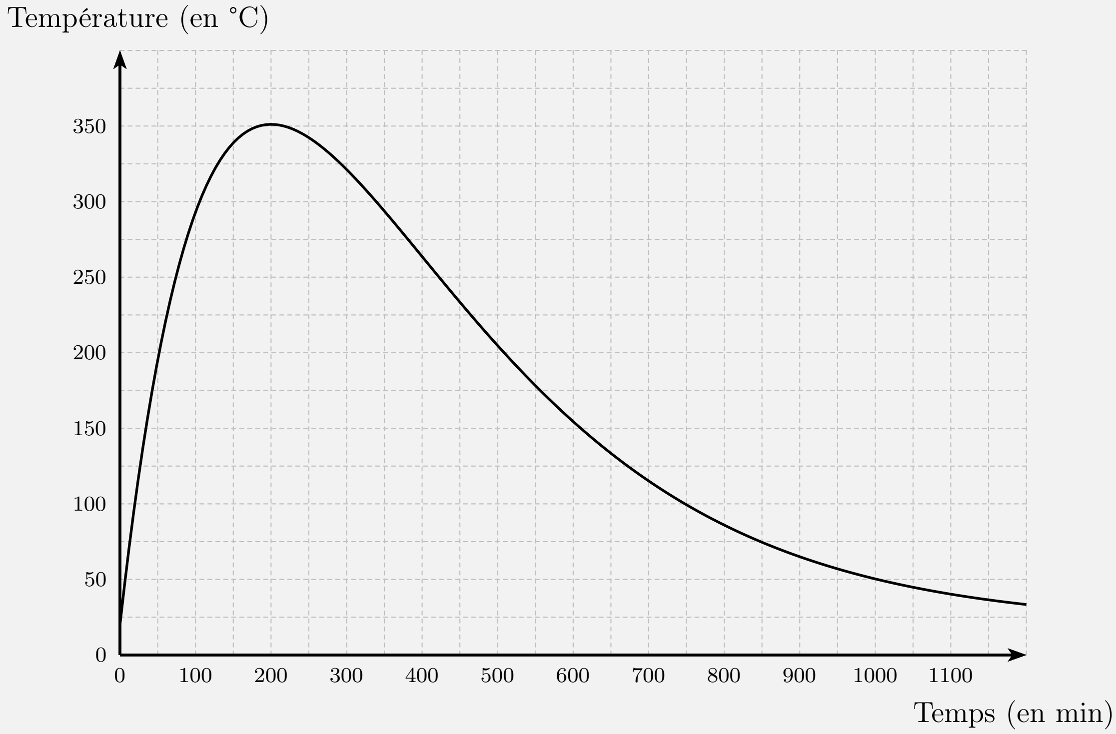
# Exercice 3

**Énoncé** **(7 points)**

Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.

*Les parties 1 et 2 sont indépendantes.*

**Partie 1 : appareil de la marque A**
À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de la marque A.
On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.




Par lecture graphique :

1. Donner le temps au bout duquel la température maximale est atteinte à l'intérieur du foyer.
2. Donner une valeur approchée, en minutes, de la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse 300°C.
3. On note $f$ la fonction représentée sur le graphique.
   Estimer la valeur de $\dfrac{1}{600}\displaystyle\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t$. Interpréter le résultat.

**Partie 2 : étude d'une fonction**
Soit la fonction $g$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = 10t\mathrm{e}^{-0,01t} + 20$.

1. Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $g'(t) = (-0,1t + 10)\mathrm{e}^{-0,01t}$.
   (b) Étudier les variations de la fonction $g$ sur $[0\,;\,+\infty[$ et construire son tableau de variations.

3. Démontrer que l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0\,;\,+\infty[$. En donner des valeurs approchées à l'unité.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Partie 3 : évaluation**
Pour un appareil de la marque B, la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer $t$ minutes après l'allumage est modélisée sur $[0\,;\,600]$ par la fonction $g$.

L'organisme certificateur attribue une étoile par critère validé parmi les quatre suivants :

- Critère 1 : la température maximale est supérieure à 320°C.
- Critère 2 : la température maximale est atteinte en moins de 2 heures.
- Critère 3 : la température moyenne durant les 10 premières heures après l'allumage dépasse 250°C.
- Critère 4 : la température à l'intérieur du foyer ne doit pas dépasser 300°C pendant plus de 5 heures.

Chaque appareil obtient-il exactement trois étoiles ? Justifier votre réponse.

**Correction**
**Partie 1**

1. On lit graphiquement que la température maximale est atteint au bout de :

$$\boxed{200 \text{ minutes}}$$

2. La température dépasse 300°C au bout d'environ 100 minutes et passe de nouveau en-dessous de 300°C après environ 350 minutes. La température à l'intérieur du foyer dépasse 300°C pendant environ :

$$\boxed{250 \text{ minutes}}$$

3. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction $f$ et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 600$. Or on peut évaluer que ce domaine est environ égal à 124 carreaux et, comme l'aire d'un carreau est égale à $50 \times 25 = 1\,250$ unités d'aires, l'intégrale est égale à environ $124 \times 1\,250 = 155\,000$. On peut alors estimer :

$$\boxed{\frac{1}{600}\int_0^{600} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 258}$$

Cela signifie que la température moyenne du four au cours des 600 premières minutes est d'environ 258°C.

**Partie 2**

1. Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} t\mathrm{e}^{-0,01t} = 0$ donc :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} g(t) = 20}$$

2.(a) La fonction $g$ est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} g'(t) &= 10\mathrm{e}^{-0,01t} + 10t \times (-0,01)\mathrm{e}^{-0,01t} \\ &= 10\mathrm{e}^{-0,01t} - 0,1t\mathrm{e}^{-0,01t} \\ &= (-0,1t + 10)\mathrm{e}^{-0,01t} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{g'(t) = (-0{,}1t + 10)\mathrm{e}^{-0{,}01t}}$$

(b) Pour tout $[0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-0{,}01t} > 0$ donc $g'(t)$ est du signe de $(-0{,}1t + 10)$, d'où le tableau :

| $x$ | $0$ | | $100$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $20$ | $\nearrow$ | $f(100)$ | $\searrow$ | $20$ |

3. • Sur l'intervalle $[0\,;\,100]$, la fonction $g$ est continue et strictement croissante. De plus $f(0) = 20 < 300$ et $f(100) \approx 388 > 300$. On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(t) = 300$ admet une unique solution $\alpha$ sur $[0\,;\,100]$.

   • Sur l'intervalle $[100\,;\,+\infty[$, la fonction $g$ est continue et strictement décroissante. De plus $f(100) \approx 388 > 300$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 20 < 300$. On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $g(t) = 300$ admet une unique solution $\beta$ sur $[100\,;\,+\infty[$.

   Finalement, l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[0\,;\,+\infty[$ et on obtient, à l'aide de la calculatrice :

$$\boxed{\alpha \approx 43} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta \approx 193}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{600} 10t\mathrm{e}^{-0{,}01t} + 20\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{600} 10t\mathrm{e}^{-0{,}01t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{600} 20\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{600} 10t\mathrm{e}^{-0{,}01t}\,\mathrm{d}t + 12\,000\end{aligned}$$

   Posons :

$$\begin{cases} u(t) = 10t \\ v'(t) = \mathrm{e}^{-0{,}01t}\end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(t) = 10 \\ v(t) = -100\mathrm{e}^{-0{,}01t}\end{cases}$$

   On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{600} 10t\mathrm{e}^{-0{,}01t}\,\mathrm{d}t &= \Big[10t \times (-100\mathrm{e}^{-0{,}01t})\Big]_0^{600} - \int_0^{600} 10 \times (-100\mathrm{e}^{-0{,}01t})\,\mathrm{d}t\\ &= \Big[-1\,000t\mathrm{e}^{-0{,}01t}\Big]_0^{600} + \int_0^{600} 1\,000\mathrm{e}^{-0{,}01t}\,\mathrm{d}t\\ &= -600\,000\mathrm{e}^{-6} + 1\,000 \times 0\mathrm{e}^{0} + \Big[-100\,000\mathrm{e}^{-0{,}01t}\Big]_0^{600}\\ &= -600\,000\mathrm{e}^{-6} - 100\,000\mathrm{e}^{-6} + 100\,000\mathrm{e}^{0}\\ &= 100\,000 - 700\,000\mathrm{e}^{-6}\end{aligned}$$

   Et finalement :

$$\boxed{\int_0^{600} g(t)\,\mathrm{d}t = 112\,000 - 700\,000\mathrm{e}^{-6} \approx 110\,265}$$

**Partie 3**

- Pour l'appareil A :
  - ✔ la température maximale est supéieure à 320°C (elle est d'environ 350°C).
  - ✖ la température maximale n'est pas atteinte en moins de 2 heures (elle est atteinte en 200 minutes).
  - ✔ la température moyenne durant les 10 premières heures (donc les 600) premières minutes est supérieure à 250°C (elle est d'environ 258°C).
  - ✔ la température à l'intérieur du foyer ne dépasse pas 300°C pendant plus de 5 heures (elle les dépasse pendant environ 250 minutes).

$$\boxed{\text{L'appareil A obtient donc exactement 3 étoiles}}$$

- Pour l'appareil B :
  - ✔ la température maximale est supéieure à 320°C (elle est d'environ 388°C).
  - ✔ la température maximale est atteinte en moins de 2 heures (elle est atteinte en 100 minutes).
  - ✖ la température moyenne durant les 10 premières heures (donc les 600) premières minutes n'est pas supérieure à 250°C (elle est d'environ $\frac{110\,265}{600} \approx 184$°C).
  - ✔ la température à l'intérieur du foyer ne dépasse pas 300°C pendant plus de 5 heures (elle les dépasse pendant environ 150 minutes entre la 43-ième minute et la 93-ième).

$$\boxed{\text{L'appareil B obtient donc exactement 3 étoiles}}$$

**Commentaires**

- Dans la question 1, l'argument « par croissances comparées » est un peu rapide. Si l'on veut se ramener à la formule du cours, on peut écrire :

$$t\mathrm{e}^{-0{,}01t} = -100 \times (-0{,}01t)\mathrm{e}^{-0{,}01t}$$

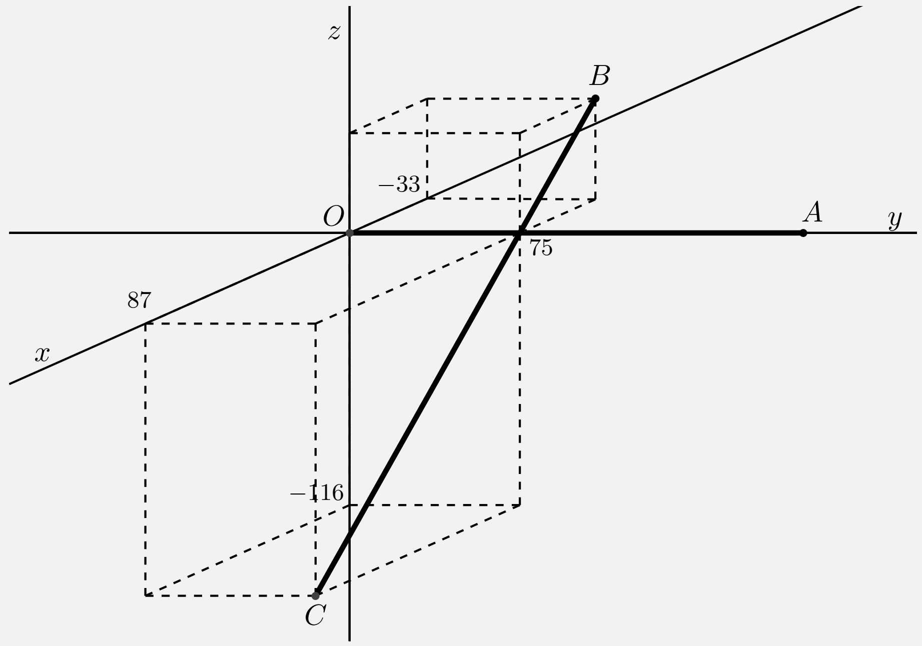
On se ramène ainsi à une expression de la forme $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x}$.

## Exercice 4

**Énoncé** **(4 points)**

On modélise un passage de spectacle de voltige aérienne en duo de la manière suivante :

- on se place dans un repère orthonormé $(0\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,,\,\overrightarrow{k})$, une unité représentant un mètre ;
- l'avion n° 1 doit relier le point $O$ au point $A(0\,;\,200\,;\,0)$ selon une trajectoire rectiligne, à la vitesse constante de 200 m/s ;
- l'avion n° 2 doit, quant à lui, relier le point $B(-33\,;\,75\,;\,44)$ au point $C(87\,;\,75\,;\,-116)$ également selon une trajectoire rectiligne, et à la vitesse constante de 200 m/s.
- au même instant, l'avion n° 1 est au point $O$ et l'avion n° 2 est au point $B$.




1. Justifier que l'avion n° 2 mettra autant de temps à parcourir le segment $[BC]$ que l'avion n° 1 à parcourir le segment $[0A]$.
2. Montrer que les trajectoires des deux avions se coupent.
3. Les deux avions risquent-ils de se percuter lors de ce passage ?

**Correction**

1. On a :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(87-(-33))^2+(75-75)^2+(-116-44)^2} \\ &= \sqrt{120^2+0^2+(-160^2)} \\ &= \sqrt{40\,000} \\ &= 200 \end{aligned}$$

Et on a directement $OA = 200$, soit :

$$\boxed{OA = 200} \quad \text{et} \quad \boxed{BC = 200}$$

Et comme les avions volent tous les deux à la même vitesse, l'avion n° 2 mettra autant de temps à parcourir le segment $[BC]$ que l'avion n° 1 à parcourir le segment $[0A]$.

2. Il s'agit de montrer que les segments $[OA]$ et $[BC]$ sont sécants. Les droites $(OA)$ et $(BC)$ admettent pour représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = -33 + 120t' \\ y = 75 \\ z = 44 - 160t' \end{cases} \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R}$$

Déterminons l'intersection de ces deux droites :

$$\begin{cases} 0 = -33 + 120t' \\ t = 75 \\ 0 = 44 - 160t' \end{cases} \iff \begin{cases} 120t' = 33 \\ t = 75 \\ 160t' = 44 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t' = \dfrac{33}{120} \\ t = 75 \\ t' = \dfrac{44}{160} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 75 \\ t' = 0{,}275 \end{cases}$$

Les deux droites sont donc sécantes au point de paramètre $t = 75$ dans la représentation paramétrique de $(OA)$ et de paramètre $t' = 0{,}275$ dans celle de $(BC)$, c'est-à-dire au point :

$$\boxed{H(0\,;\,75\,;\,0)}$$

Et ce point appartient bien aux deux segments donc :

$$\boxed{\text{Les trajectoires des deux avions se coupent}}$$

3. - L'avion n$^\text{o}$ 1 se trouve au point $O$, de paramètre $t = 0$, au bout de 0 seconde et au point $A$, de paramètre $t = 200$, au bout d'une seconde. Il passe donc par le point $H$, de paramètre $t = 75$ après $\dfrac{75}{200} = 0{,}375$ seconde.
   - L'avion n$^\text{o}$ 2 se trouve au point $B$, de paramètre $t' = 0$, au bout de 0 seconde et au point $C$, de paramètre $t' = 1$, au bout d'une seconde. Il passe donc par le point $H$, de paramètre $t' = 0{,}275$ après 0,275 seconde.

   Les avions passent au point d'intersection de leurs trajectoires à 0,1 seconde d'écart. L'avion n$^\text{o}$ 2 aurra donc parcouru 20 mètres au moment ou l'avion n$^\text{o}$ 1 passera au point $H$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Les deux avions ne devraient pas se percuter}}$$

**Commentaires**

- Afin d'obtenir une représentation paramétrique de la droite $(BC)$, on utilise le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 87-(-33) \\ 75-75 \\ -116-44 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ -160 \end{pmatrix}$.
- Les paramètres $t$ et $t'$ peuvent être vus comme le temps écoulé à partir de l'instant 0. Cependant, avec les représentations paramétriques que j'ai choisies, le temps ne s'écoule pas à la même vitesse. Si l'on souhaite que le temps s'écoule en seconde pour les deux représentations, on aurait dû choisir la représentation paramétrique suivante pour la droite $(OA)$ :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 200t \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$