Métropole - 20 juin 2024 (sujet dévoilé)

Spécialité mathématiques - Baccalauréat

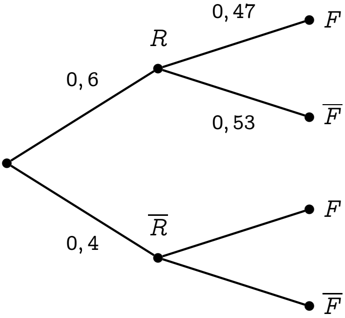
Exercice 1 - Partie A

Exercice 1 - Partie A

1. (a) On complète l'arbre de la façon suivante :

Exercice 1 - Partie A

1. (a) On complète l'arbre de la façon suivante :



1. (b) Il s'agit de calculer $P(R \cap F)$:

1. (b) Il s'agit de calculer $P(R \cap F)$:

$$P(R \cap F) =$$

1. (b) Il s'agit de calculer $P(R \cap F)$:

$$P(R \cap F) = P(R) \times P_R(F)$$

1. (b) Il s'agit de calculer $P(R \cap F)$:

$$\begin{aligned} P(R \cap F) &= P(R) \times P_R(F) \\ &= 0,6 \times 0,47 \end{aligned}$$

1. (b) Il s'agit de calculer $P(R \cap F)$:

$$\begin{aligned} P(R \cap F) &= P(R) \times P_R(F) \\ &= 0,6 \times 0,47 \\ &= 0,282 \end{aligned}$$

1. (b) Il s'agit de calculer $P(R \cap F)$:

$$\begin{aligned} P(R \cap F) &= P(R) \times P_R(F) \\ &= 0,6 \times 0,47 \\ &= 0,282 \end{aligned}$$

La probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité est donc :

1. (b) Il s'agit de calculer $P(R \cap F)$:

$$\begin{aligned} P(R \cap F) &= P(R) \times P_R(F) \\ &= 0,6 \times 0,47 \\ &= 0,282 \end{aligned}$$

La probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité est donc :

$$\boxed{P(R \cap F) = 0,282}$$

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$.

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$.

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(\overline{R} \cap F)$$

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(\overline{R} \cap F)$$

On en déduit :

$$P(\overline{R} \cap F) =$$

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(\overline{R} \cap F)$$

On en déduit :

$$P(\overline{R} \cap F) = P(F) - P(R \cap F)$$

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(\overline{R} \cap F)$$

On en déduit :

$$P(\overline{R} \cap F) = P(F) - P(R \cap F) = 0,38 - 0,282$$

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(\overline{R} \cap F)$$

On en déduit :

$$P(\overline{R} \cap F) = P(F) - P(R \cap F) = 0,38 - 0,282 = 0,098$$

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(\overline{R} \cap F)$$

On en déduit :

$$P(\overline{R} \cap F) = P(F) - P(R \cap F) = 0,38 - 0,282 = 0,098$$

On a alors :

$$P_{\overline{R}}(F) =$$

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(\overline{R} \cap F)$$

On en déduit :

$$P(\overline{R} \cap F) = P(F) - P(R \cap F) = 0,38 - 0,282 = 0,098$$

On a alors :

$$P_{\overline{R}}(F) = \frac{P(\overline{R} \cap F)}{P(\overline{R})}$$

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R}\cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(R\cap F) + P(\overline{R}\cap F)$$

On en déduit :

$$P(\overline{R}\cap F) = P(F) - P(R\cap F) = 0,38 - 0,282 = 0,098$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P_{\overline{R}}(F) &= \frac{P(\overline{R}\cap F)}{P(\overline{R})} \\ &= \frac{0,098}{0,4} \end{aligned}$$

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(\overline{R} \cap F)$$

On en déduit :

$$P(\overline{R} \cap F) = P(F) - P(R \cap F) = 0,38 - 0,282 = 0,098$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P_{\overline{R}}(F) &= \frac{P(\overline{R} \cap F)}{P(\overline{R})} \\ &= \frac{0,098}{0,4} \\ &= 0,245 \end{aligned}$$

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(\overline{R} \cap F)$$

On en déduit :

$$P(\overline{R} \cap F) = P(F) - P(R \cap F) = 0,38 - 0,282 = 0,098$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P_{\overline{R}}(F) &= \frac{P(\overline{R} \cap F)}{P(\overline{R})} \\ &= \frac{0,098}{0,4} \\ &= 0,245 \end{aligned}$$

La probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier est donc :

1. (c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(\overline{R} \cap F)$$

On en déduit :

$$P(\overline{R} \cap F) = P(F) - P(R \cap F) = 0,38 - 0,282 = 0,098$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P_{\overline{R}}(F) &= \frac{P(\overline{R} \cap F)}{P(\overline{R})} \\ &= \frac{0,098}{0,4} \\ &= 0,245 \end{aligned}$$

La probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier est donc :

$$\boxed{P_{\overline{R}}(F) = 0,245}$$

1. (d) Calculons $P_F(R)$:

1. (d) Calculons $P_F(R)$:

$$P_F(R) =$$

1. (d) Calculons $P_F(R)$:

$$P_F(R) = \frac{P(R \cap F)}{P(F)}$$

1. (d) Calculons $P_F(R)$:

$$P_F(R) = \frac{P(R \cap F)}{P(F)}$$
$$= \frac{0,282}{0,38}$$

1. (d) Calculons $P_F(R)$:

$$\begin{aligned} P_F(R) &= \frac{P(R \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{0,282}{0,38} \\ &\approx 0,74 \end{aligned}$$

1. (d) Calculons $P_F(R)$:

$$\begin{aligned} P_F(R) &= \frac{P(R \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{0,282}{0,38} \\ &\approx 0,74 \end{aligned}$$

La probabilité que le client soit un client régulier sachant qu'il a acheté la carte de fidélité est donc d'environ $0,74$, soit environ 74 %.

1. (d) Calculons $P_F(R)$:

$$
\begin{aligned}
P_F(R) &= \frac{P(R \cap F)}{P(F)} \\
&= \frac{0,282}{0,38} \\
&\approx 0,74
\end{aligned}
$$

La probabilité que le client soit un client régulier sachant qu'il a acheté la carte de fidélité est donc d'environ $0,74$, soit environ 74 %. On en déduit que :

$$\boxed{\text{L'affirmation du directeur est inexacte}}$$

2. (a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante,

2. (a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès égale à $0,38$.

2. (a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès égale à $0,38$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

2. (a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès égale à $0,38$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 20 \text{ et } p = 0,38}$$

2. (b) Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 5)$.

2. (b) Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 5)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice que la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité parmi les 20 clients est :

2. (b) Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 5)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice que la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité parmi les 20 clients est :

$$\boxed{P(X \geqslant 5) \approx 0,927}$$

Partie B

Partie B

1. La variable aléatoire X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$.

Partie B

1. La variable aléatoire X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$. Son espérance est donc
$E(X_2) =$

Partie B

1. La variable aléatoire X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$. Son espérance est donc
   $E(X_2) = n \times p$

Partie B

1. La variable aléatoire X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$. Son espérance est donc $E(X_2) = n \times p = 1\,000 \times 0,47$

Partie B

1. La variable aléatoire X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$. Son espérance est donc
$E(X_2) = n \times p = 1\,000 \times 0,47 = 470$,

Partie B

1. La variable aléatoire X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$. Son espérance est donc $E(X_2) = n \times p = 1\,000 \times 0,47 = 470$, soit :

$$\boxed{E(X_2) = 470}$$

1. La variable aléatoire X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$. Son espérance est donc $E(X_2) = n \times p = 1\,000 \times 0,47 = 470$, soit :

$$\boxed{E(X_2) = 470}$$

Cela signifie que sur un échantillon de $1\,000$ clients réguliers, il y en a 470, en moyenne, qui ont acheté la carte de fidélité.

2. La variable aléatoire Z modélise :

2. La variable aléatoire Z modélise :

$$\boxed{\text{Le montant moyen offert à chacun des } 1\,000 \text{ clients}}$$

Calculons son espérance :

$$E(Z) =$$

Calculons son espérance :

$$E(Z) = E\left(\frac{Y}{1\,000}\right)$$

Calculons son espérance :

$$\begin{aligned} E(Z) &= E\left(\frac{Y}{1\,000}\right) \\ &= \frac{1}{1\,000} E(Y_1 + Y_2) \quad \textit{(linéarité de l'espérance)} \end{aligned}$$

Calculons son espérance :

$$\begin{aligned} E(Z) &= E\left(\frac{Y}{1\,000}\right) \\ &= \frac{1}{1\,000} E(Y_1 + Y_2) \quad \textit{(linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1}{1\,000} \left(E(Y_1) + E(Y_2)\right) \quad \textit{(linéarité de l'espérance)} \end{aligned}$$

Calculons son espérance :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E\left(\frac{Y}{1\,000}\right) \\
&= \frac{1}{1\,000} E(Y_1 + Y_2) \quad \textit{(linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{1\,000} \left(E(Y_1) + E(Y_2)\right) \quad \textit{(linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{1\,000} \left(30\,000 + 50E(X_2)\right)
\end{aligned}$$

Calculons son espérance :

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= E\left(\frac{Y}{1\,000}\right) \\
&= \frac{1}{1\,000} E(Y_1 + Y_2) \quad \textit{(linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{1\,000} \left(E(Y_1) + E(Y_2)\right) \quad \textit{(linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{1\,000} \left(30\,000 + 50 E(X_2)\right) \\
&= \frac{1}{1\,000} \left(30\,000 + 50 \times 470\right)
\end{aligned}
$$

Calculons son espérance :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E\left(\frac{Y}{1\,000}\right) \\
&= \frac{1}{1\,000} E(Y_1 + Y_2) \quad \textit{(linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{1\,000} \left(E(Y_1) + E(Y_2)\right) \quad \textit{(linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{1\,000} \left(30\,000 + 50 E(X_2)\right) \\
&= \frac{1}{1\,000} \left(30\,000 + 50 \times 470\right) \\
&= 53,5
\end{aligned}$$

Calculons son espérance :

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= E\left(\frac{Y}{1\,000}\right)\\
&= \frac{1}{1\,000}E(Y_1 + Y_2) \quad \textit{(linéarité de l'espérance)}\\
&= \frac{1}{1\,000}\left(E(Y_1) + E(Y_2)\right) \quad \textit{(linéarité de l'espérance)}\\
&= \frac{1}{1\,000}\left(30\,000 + 50E(X_2)\right)\\
&= \frac{1}{1\,000}\left(30\,000 + 50 \times 470\right)\\
&= 53,5
\end{aligned}
$$

Soit :

$$\boxed{E(Z) = 53,5}$$

Calculons maintenant sa variance.

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$,

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc

$V(X_2) =$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc
$V(X_2) = np(1 - p)$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc
$V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc
$V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$.

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc
$V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que
$V(Y_2) =$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc
$V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que
$V(Y_2) = V(50X_2)$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc
$V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que
$V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2\,V(X_2)$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc
$V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que
$V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2\,V(X_2) = 2\,500 \times 249,1$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc $V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2\,V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$.

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc $V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2\,V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$. Puis, comme les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes :

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc $V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2\,V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$. Puis, comme les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes :

$$V(Y) =$$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc $V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2\,V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$. Puis, comme les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes :

$$V(Y) = V(Y_1 + Y_2)$$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc $V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2\,V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$. Puis, comme les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes :

$$V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2)$$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc $V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2\,V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$. Puis, comme les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes :

$$V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2) = 100\,000 + 622\,750$$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc $V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2\,V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$. Puis, comme les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes :

$$V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2) = 100\,000 + 622\,750 = 722\,750$$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc $V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2\,V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$. Puis, comme les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes :

$$V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2) = 100\,000 + 622\,750 = 722\,750$$

Et enfin $V(Z) =$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc $V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2\,V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$. Puis, comme les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes :

$$V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2) = 100\,000 + 622\,750 = 722\,750$$

Et enfin $V(Z) = \dfrac{1}{1\,000^2}\,V(Y)$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc $V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2\,V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$. Puis, comme les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes :

$$V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2) = 100\,000 + 622\,750 = 722\,750$$

Et enfin $V(Z) = \dfrac{1}{1\,000^2}V(Y) = \dfrac{722\,750}{1\,000\,000}$,

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,47$, sa variance est donc $V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0,47 \times 0,53 = 249,1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2\,V(X_2) = 2\,500 \times 249,1 = 622\,750$. Puis, comme les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes :

$$V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2) = 100\,000 + 622\,750 = 722\,750$$

Et enfin $V(Z) = \dfrac{1}{1\,000^2}V(Y) = \dfrac{722\,750}{1\,000\,000}$, soit :

$$\boxed{V(Z) = 0,72275}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant 1,8\right) \leqslant \frac{V(Z)}{1,8^2}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant 1,8\right) \leqslant \frac{V(Z)}{1,8^2}$$

Soit :

$$P\left(|Z - 53,5| \geqslant 1,8\right) \leqslant \frac{0,72275}{3,24}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant 1,8\right) \leqslant \frac{V(Z)}{1,8^2}$$

Soit :

$$P\left(|Z - 53,5| \geqslant 1,8\right) \leqslant \frac{0,72275}{3,24}$$

Et, par passage à l'événement contraire :

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant 1,8\right) \leqslant \frac{V(Z)}{1,8^2}$$

Soit :

$$P\left(|Z - 53,5| \geqslant 1,8\right) \leqslant \frac{0,72275}{3,24}$$

Et, par passage à l'événement contraire :

$$P\left(53,5 - 1,8 < Z < 53,5 + 1,8\right) \geqslant 1 - \frac{0,72275}{3,24}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant 1,8\right) \leqslant \frac{V(Z)}{1,8^2}$$

Soit :

$$P\left(|Z - 53,5| \geqslant 1,8\right) \leqslant \frac{0,72275}{3,24}$$

Et, par passage à l'événement contraire :

$$P\left(53,5 - 1,8 < Z < 53,5 + 1,8\right) \geqslant 1 - \frac{0,72275}{3,24}$$

Soit :

$$P\left(51,7 < Z < 55,3\right) \geqslant 1 - \frac{0,72275}{3,24}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant 1,8\right) \leqslant \frac{V(Z)}{1,8^2}$$

Soit :

$$P\left(|Z - 53,5| \geqslant 1,8\right) \leqslant \frac{0,72275}{3,24}$$

Et, par passage à l'événement contraire :

$$P\left(53,5 - 1,8 < Z < 53,5 + 1,8\right) \geqslant 1 - \frac{0,72275}{3,24}$$

Soit :

$$P\left(51,7 < Z < 55,3\right) \geqslant 1 - \frac{0,72275}{3,24}$$

Or $1 - \dfrac{0,72275}{3,24} \approx 0,777$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant 1,8\right) \leqslant \frac{V(Z)}{1,8^2}$$

Soit :

$$P\left(|Z - 53,5| \geqslant 1,8\right) \leqslant \frac{0,72275}{3,24}$$

Et, par passage à l'événement contraire :

$$P\left(53,5 - 1,8 < Z < 53,5 + 1,8\right) \geqslant 1 - \frac{0,72275}{3,24}$$

Soit :

$$P\left(51,7 < Z < 55,3\right) \geqslant 1 - \frac{0,72275}{3,24}$$

Or $1 - \dfrac{0,72275}{3,24} \approx 0,777$ donc on a bien :

$$\boxed{P\left(51,7 < Z < 55,3\right) \geqslant 0,75}$$

Exercice 2

- **Affirmation 1 : Vrai**

Exercice 2

- **Affirmation 1 : Vrai**

  On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Exercice 2

- **Affirmation 1 : Vrai**
  On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 2

- **Affirmation 1 : Vrai**
  On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et :

Exercice 2

- **Affirmation 1 : Vrai**

  On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et :

  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} =$

Exercice 2

- **Affirmation 1 : Vrai**

  On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et :

  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times 6 + 2\times(-3) + (-1)\times 6$

Exercice 2

- **Affirmation 1 : Vrai**
  On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et :
  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times 6 + 2\times(-3) + (-1)\times 6 = 12 - 6 - 6$

- **Affirmation 1 : Vrai**

  On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et :

  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times 6 + 2\times(-3) + (-1)\times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$

Exercice 2

- **Affirmation 1 : Vrai**

  On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et :

  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times 6 + 2\times(-3) + (-1)\times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$
  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} =$

Exercice 2

- **Affirmation 1 : Vrai**

  On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et :
  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times 6 + 2\times(-3) + (-1)\times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$
  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times 6 + 2\times(-6) + 0\times 6$

Exercice 2

- **Affirmation 1 : Vrai**

  On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et :

  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times 6 + 2\times(-3) + (-1)\times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$
  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times 6 + 2\times(-6) + 0\times 6 = 12 - 6 - 6$

Exercice 2

- **Affirmation 1 : Vrai**

  On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et :
  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times 6 + 2\times(-3) + (-1)\times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$
  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times 6 + 2\times(-6) + 0\times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$

Exercice 2

- **Affirmation 1 : Vrai**

  On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et :
  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times 6 + 2\times(-3) + (-1)\times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$
  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times 6 + 2\times(-6) + 0\times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$

  Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).

- **Affirmation 1 : Vrai**

  On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et :

  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times 6 + 2\times(-3) + (-1)\times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$
  - $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times 6 + 2\times(-6) + 0\times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$

  Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

- **Affirmation 2 : Vrai**

- **Affirmation 2 : Vrai**
  Les points A et B appartiennent tous les deux à la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

- **Affirmation 2 : Vrai**

  Les points A et B appartiennent tous les deux à la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$. En effet A est le point de paramètre $t = -1$

- **Affirmation 2 : Vrai**
  Les points A et B appartiennent tous les deux à la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$. En effet A est le point de paramètre $t = -1$ et B le point de paramètre 2.

- **Affirmation 2 : Vrai**

  Les points A et B appartiennent tous les deux à la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-t \\ z = 1+2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$. En effet A est le point de paramètre $t = -1$ et B le point de paramètre 2. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc bien

  $$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-t \\ z = 1+2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

- **Affirmation 3 : Faux**

- **Affirmation 3 : Faux**

  Le plan d'équation cartésienne $2x + 2y - z - 9 = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

- **Affirmation 3 : Faux**
  Le plan d'équation cartésienne $2x + 2y - z - 9 = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Or ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc ce plan n'est pas orthogonal à (AB).

- **Affirmation 3 : Faux**
  Le plan d'équation cartésienne $2x + 2y - z - 9 = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Or ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc ce plan n'est pas orthogonal à (AB). Il ne s'agit donc pas d'une équation du plan $\mathscr{P}$.

- **Affirmation 4 : Faux**

- **Affirmation 4 : Faux**

  La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

- **Affirmation 4 : Faux**

  La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et la droite $\mathscr{D}'$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

- **Affirmation 4 : Faux**

  La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et la droite $\mathscr{D}'$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires

- **Affirmation 4 : Faux**

  La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et la droite $\mathscr{D}'$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles.

Déterminons leur intersection :

Déterminons leur intersection :

$$\begin{cases} 3+t=2t' \\ 1+t=4-t' \\ 2+t=-1+2t' \end{cases} \iff$$

Déterminons leur intersection :

$$\begin{cases} 3 + t = 2t' \\ 1 + t = 4 - t' \\ 2 + t = -1 + 2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2t' - 3 \\ 1 + 2t' - 3 = 4 - t' \\ 2 + 2t' - 3 = -1 + 2t' \end{cases}$$

Déterminons leur intersection :

$$\begin{cases} 3+t=2t' \\ 1+t=4-t' \\ 2+t=-1+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 1+2t'-3=4-t' \\ 2+2t'-3=-1+2t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 3t'=6 \\ -1=-1 \end{cases}$$

Déterminons leur intersection :

$$\begin{cases} 3+t=2t' \\ 1+t=4-t' \\ 2+t=-1+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 1+2t'-3=4-t' \\ 2+2t'-3=-1+2t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 3t'=6 \\ -1=-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=1 \\ t'=2 \end{cases}$$

Déterminons leur intersection :

$$\begin{cases} 3+t=2t' \\ 1+t=4-t' \\ 2+t=-1+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 1+2t'-3=4-t' \\ 2+2t'-3=-1+2t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 3t'=6 \\ -1=-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=1 \\ t'=2 \end{cases}$$

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont donc sécantes

Déterminons leur intersection :

$$\begin{cases} 3+t=2t' \\ 1+t=4-t' \\ 2+t=-1+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 1+2t'-3=4-t' \\ 2+2t'-3=-1+2t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 3t'=6 \\ -1=-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=1 \\ t'=2 \end{cases}$$

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont donc sécantes et le point d'intersection est le point de paramètre $t=1$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$

Déterminons leur intersection :

$$\begin{cases} 3+t=2t' \\ 1+t=4-t' \\ 2+t=-1+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 1+2t'-3=4-t' \\ 2+2t'-3=-1+2t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 3t'=6 \\ -1=-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=1 \\ t'=2 \end{cases}$$

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont donc sécantes et le point d'intersection est le point de paramètre $t=1$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ et de paramètre $t'=2$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}'$,

Déterminons leur intersection :

$$\begin{cases} 3+t=2t' \\ 1+t=4-t' \\ 2+t=-1+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 1+2t'-3=4-t' \\ 2+2t'-3=-1+2t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 3t'=6 \\ -1=-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=1 \\ t'=2 \end{cases}$$

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont donc sécantes et le point d'intersection est le point de paramètre $t=1$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ et de paramètre $t'=2$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}'$, soit le point de coordonnées $(4\,;\,2\,;\,3)$.

Déterminons leur intersection :

$$\begin{cases} 3+t=2t' \\ 1+t=4-t' \\ 2+t=-1+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 1+2t'-3=4-t' \\ 2+2t'-3=-1+2t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=2t'-3 \\ 3t'=6 \\ -1=-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=1 \\ t'=2 \end{cases}$$

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont donc sécantes et le point d'intersection est le point de paramètre $t=1$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ et de paramètre $t'=2$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}'$, soit le point de coordonnées $(4\,;2\,;3)$. Les droites étant sécantes, elles sont coplanaires.

Exercice 3 - Partie A

Exercice 3 - Partie A

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

Exercice 3 - Partie A

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - 2 =$$

Exercice 3 - Partie A

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 2u_n + 2 - 2$$

Exercice 3 - Partie A

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= u_n^2 - 2u_n + 2 - 2 \\ &= u_n^2 - 2u_n \end{aligned}$$

Exercice 3 - Partie A

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= u_n^2 - 2u_n + 2 - 2 \\ &= u_n^2 - 2u_n \\ &= u_n(u_n - 2) \quad \textit{(factorisation par } u_n\textit{)} \end{aligned}$$

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= u_n^2 - 2u_n + 2 - 2 \\ &= u_n^2 - 2u_n \\ &= u_n(u_n - 2) \quad \textit{(factorisation par } u_n\textit{)} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)}$$

1. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part :

1. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part :

$$u_{n+1} - u_n =$$

1. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n$$

1. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \end{aligned}$$

1. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \end{aligned}$$

Et d'autre part :

1. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$(u_n - 1)(u_n - 2) =$$

1. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$(u_n - 1)(u_n - 2) = u_n^2 - 2u_n - u_n + 2$$

1. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} (u_n - 1)(u_n - 2) &= u_n^2 - 2u_n - u_n + 2 \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \end{aligned}$$

1. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} (u_n - 1)(u_n - 2) &= u_n^2 - 2u_n - u_n + 2 \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)}$$

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

   - **Initialisation :**

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$.

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$,

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$.

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question a, que :

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question a, que :

$$u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$$

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question a, que :

  $$u_{n+1} - 2 = u_n\,(u_n - 2)$$

  Or d'après l'énoncé, $u_n > 1$

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question a, que :

$$u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$$

  Or d'après l'énoncé, $u_n > 1$ et, par hypothèse de récurrence, $u_n < 2$

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question a, que :

  $$u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$$

  Or d'après l'énoncé, $u_n > 1$ et, par hypothèse de récurrence, $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$.

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question a, que :

$$u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$$

  Or d'après l'énoncé, $u_n > 1$ et, par hypothèse de récurrence, $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit $u_n(u_n - 2) < 0$,

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question a, que :

$$u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$$

  Or d'après l'énoncé, $u_n > 1$ et, par hypothèse de récurrence, $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit $u_n(u_n - 2) < 0$, soit $u_{n+1} - 2 < 0$

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question a, que :

  $$u_{n+1} - 2 = u_n \left(u_n - 2 \right)$$

  Or d'après l'énoncé, $u_n > 1$ et, par hypothèse de récurrence, $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit $u_n \left(u_n - 2 \right) < 0$, soit $u_{n+1} - 2 < 0$ et donc :

  $$u_{n+1} < 2$$

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question a, que :

$$u_{n+1} - 2 = u_n\left(u_n - 2\right)$$

  Or d'après l'énoncé, $u_n > 1$ et, par hypothèse de récurrence, $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit $u_n\left(u_n - 2\right) < 0$, soit $u_{n+1} - 2 < 0$ et donc :

$$u_{n+1} < 2$$

  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question a, que :

  $$u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$$

  Or d'après l'énoncé, $u_n > 1$ et, par hypothèse de récurrence, $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit $u_n(u_n - 2) < 0$, soit $u_{n+1} - 2 < 0$ et donc :

  $$u_{n+1} < 2$$

  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question a, que :
  $$u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$$
  Or d'après l'énoncé, $u_n > 1$ et, par hypothèse de récurrence, $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit $u_n(u_n - 2) < 0$, soit $u_{n+1} - 2 < 0$ et donc :
  $$u_{n+1} < 2$$
  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire,

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question a, que :

$$u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$$

  Or d'après l'énoncé, $u_n > 1$ et, par hypothèse de récurrence, $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit $u_n(u_n - 2) < 0$, soit $u_{n+1} - 2 < 0$ et donc :

$$u_{n+1} < 2$$

  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question a, que :

  $$u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$$

  Or d'après l'énoncé, $u_n > 1$ et, par hypothèse de récurrence, $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit $u_n(u_n - 2) < 0$, soit $u_{n+1} - 2 < 0$ et donc :

  $$u_{n+1} < 2$$

  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$\boxed{u_n < 2}$$

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$.

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée,

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l.

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. La suite (u_n) étant convergente et la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$,

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. La suite (u_n) étant convergente et la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite l est un point fixe de f,

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. La suite (u_n) étant convergente et la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$.

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. La suite (u_n) étant convergente et la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x \iff$$

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. La suite (u_n) étant convergente et la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x \iff x^2 - 2x + 2 = x$$

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. La suite (u_n) étant convergente et la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 - 2x + 2 = x \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \end{aligned}$$

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. La suite (u_n) étant convergente et la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 - 2x + 2 = x \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré qui admet deux racines : 1 et 2.

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. La suite (u_n) étant convergente et la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 - 2x + 2 = x \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré qui admet deux racines : 1 et 2. Et comme la suite (u_n) est décroissante et $u_0 < 2$,

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. La suite (u_n) étant convergente et la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 - 2x + 2 = x \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré qui admet deux racines : 1 et 2. Et comme la suite (u_n) est décroissante et $u_0 < 2$, la suite ne peut pas converger vers 2.

2. (b)

- D'après la question ?, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. La suite (u_n) étant convergente et la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 - 2x + 2 = x \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation du second degré qui admet deux racines : 1 et 2. Et comme la suite (u_n) est décroissante et $u_0 < 2$, la suite ne peut pas converger vers 2. On en déduit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

Partie B

Partie B

1. La commande `u(2,1)` renvoie la valeur de u_1 dans le cas où $a = 2$.

Partie B

1. La commande `u(2,1)` renvoie la valeur de u_1 dans le cas où $a = 2$.
   Or, dans ce cas, on a $u_1 =$

Partie B

1. La commande `u(2,1)` renvoie la valeur de u_1 dans le cas où $a = 2$.
   Or, dans ce cas, on a $u_1 = 2^2 - 2 \times 2 + 2$

Partie B

1. La commande `u(2,1)` renvoie la valeur de u_1 dans le cas où $a = 2$.
   Or, dans ce cas, on a $u_1 = 2^2 - 2 \times 2 + 2 = 4 - 4 + 2$

Partie B

1. La commande `u(2,1)` renvoie la valeur de u_1 dans le cas où $a = 2$.
   Or, dans ce cas, on a $u_1 = 2^2 - 2 \times 2 + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$.

Partie B

1. La commande `u(2,1)` renvoie la valeur de u_1 dans le cas où $a = 2$. Or, dans ce cas, on a $u_1 = 2^2 - 2 \times 2 + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La commande } \texttt{u(2,1)} \text{ renvoie la valeur } 2}$$

Partie B

1. La commande `u(2,1)` renvoie la valeur de u_1 dans le cas où $a = 2$. Or, dans ce cas, on a $u_1 = 2^2 - 2 \times 2 + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La commande } \texttt{u(2,1)} \text{ renvoie la valeur } 2}$$

   De même la commande `u(2,2)` renvoie la valeur de u_2 dans le cas où $a = 2$.

Partie B

1. La commande `u(2,1)` renvoie la valeur de u_1 dans le cas où $a = 2$. Or, dans ce cas, on a $u_1 = 2^2 - 2 \times 2 + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$. On en déduit que :

   $$\boxed{\text{La commande } \texttt{u(2,1)} \text{ renvoie la valeur } 2}$$

   De même la commande `u(2,2)` renvoie la valeur de u_2 dans le cas où $a = 2$. Or, dans ce cas, $u_2 = 2$

Partie B

1. La commande `u(2,1)` renvoie la valeur de u_1 dans le cas où $a = 2$. Or, dans ce cas, on a $u_1 = 2^2 - 2 \times 2 + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La commande } \texttt{u(2,1)} \text{ renvoie la valeur } 2}$$

De même la commande `u(2,2)` renvoie la valeur de u_2 dans le cas où $a = 2$. Or, dans ce cas, $u_2 = 2$ donc :

$$\boxed{\text{La commande } \texttt{u(2,2)} \text{ renvoie la valeur } 2}$$

2. On peut conjecturer que dans la cas où $a = 2$:

2. On peut conjecturer que dans la cas où $a = 2$:

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est constante égale à } 2}$$

Partie C

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

Partie C

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} =$$

Partie C

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \ln\left(u_{n+1} - 1\right)$$

Partie C

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1} - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) \end{aligned}$$

Partie C

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1} - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 1\right) \end{aligned}$$

Partie C

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1} - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 1\right) \\ &= \ln\left((u_n - 1)^2\right) \end{aligned}$$

Partie C

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1}-1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2-2u_n+2-1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2-2u_n+1\right) \\ &= \ln\left(\left(u_n-1\right)^2\right) \\ &= 2\ln\left(u_n-1\right) \end{aligned}$$

Partie C

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1} - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 1\right) \\ &= \ln\left((u_n - 1)^2\right) \\ &= 2\ln\left(u_n - 1\right) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1} - 1\right) \\
&= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) \\
&= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 1\right) \\
&= \ln\left((u_n - 1)^2\right) \\
&= 2\ln\left(u_n - 1\right) \\
&= 2v_n
\end{aligned}$$

De plus $v_0 =$

Partie C

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1} - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 1\right) \\ &= \ln\left(\left(u_n - 1\right)^2\right) \\ &= 2\ln\left(u_n - 1\right) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

De plus $v_0 = \ln(u_0 - 1)$

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1} - 1\right) \\
&= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) \\
&= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 1\right) \\
&= \ln\left(\left(u_n - 1\right)^2\right) \\
&= 2\ln\left(u_n - 1\right) \\
&= 2v_n
\end{aligned}$$

De plus $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(a - 1)$

Partie C

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln\left(u_{n+1} - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 1\right) \\ &= \ln\left((u_n - 1)^2\right) \\ &= 2\ln\left(u_n - 1\right) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

De plus $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(a - 1)$ donc :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison 2 et de } 1^{\text{er}} \text{ terme } v_0 = \ln(a-1)}$$

1. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times 2^n$,

1. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times 2^n$, soit :

$$v_n = \ln(a-1) \times 2^n$$

1. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times 2^n$, soit :

$$v_n = \ln(a-1) \times 2^n$$

Et comme $v_n = \ln(u_n - 1)$,

1. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times 2^n$, soit :

$$v_n = \ln(a-1) \times 2^n$$

Et comme $v_n = \ln(u_n - 1)$, on a $u_n - 1 = \mathrm{e}^{v_n}$,

1. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times 2^n$, soit :

$$v_n = \ln(a-1) \times 2^n$$

Et comme $v_n = \ln(u_n - 1)$, on a $u_n - 1 = \mathrm{e}^{v_n}$, soit $u_n = 1 + \mathrm{e}^{v_n}$

1. (b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times 2^n$, soit :

$$v_n = \ln(a-1) \times 2^n$$

Et comme $v_n = \ln(u_n - 1)$, on a $u_n - 1 = \mathrm{e}^{v_n}$, soit $u_n = 1 + \mathrm{e}^{v_n}$ et donc :

$$\boxed{u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}}$$

2. Distinguons les cas :

2. Distinguons les cas :
   - Si $1 < a < 2$

2. Distinguons les cas :
   - Si $1 < a < 2$ alors $0 < a - 1 < 1$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a - 1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$.

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a - 1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n \ln(a-1)\right) =$

2. Distinguons les cas :
   - Si $1 < a < 2$ alors $0 < a - 1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n \ln(a-1)\right) = -\infty$,

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a - 1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n \ln(a-1)\right) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a - 1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n \ln(a-1)\right) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a-1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (2^n \ln(a-1)) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a-1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n \ln(a-1)\right) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a - 1 = 1$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a - 1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n \ln(a-1)\right) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a - 1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$.

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a - 1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (2^n \ln(a-1)) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a - 1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$. On a alors
$u_n =$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a-1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (2^n \ln(a-1)) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a - 1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$. On a alors $u_n = 1 + \mathrm{e}^0$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a - 1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (2^n \ln(a-1)) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \text{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a - 1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$. On a alors $u_n = 1 + \text{e}^0 = 1 + 1$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a - 1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (2^n \ln(a-1)) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a - 1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$. On a alors $u_n = 1 + \mathrm{e}^0 = 1 + 1 = 2$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a-1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n \ln(a-1)\right) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a - 1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$. On a alors $u_n = 1 + \mathrm{e}^0 = 1 + 1 = 2$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2}$$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a - 1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n \ln(a-1)\right) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a - 1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$. On a alors $u_n = 1 + \mathrm{e}^0 = 1 + 1 = 2$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2}$$

- Si $a > 2$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a - 1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n \ln(a-1)\right) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a - 1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$. On a alors $u_n = 1 + \mathrm{e}^0 = 1 + 1 = 2$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2}$$

- Si $a > 2$ alors $a - 1 > 1$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a-1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n \ln(a-1)) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a-1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$. On a alors $u_n = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$$

- Si $a > 2$ alors $a-1 > 1$ donc $\ln(a-1) > 0$.

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a-1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n \ln(a-1)\right) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a-1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$. On a alors $u_n = 1 + \mathrm{e}^0 = 1 + 1 = 2$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2}$$

- Si $a > 2$ alors $a-1 > 1$ donc $\ln(a-1) > 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n \ln(a-1)\right) = +\infty$,

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a-1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n \ln(a-1)) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a-1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$. On a alors $u_n = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$$

- Si $a > 2$ alors $a-1 > 1$ donc $\ln(a-1) > 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n \ln(a-1)) = +\infty$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{2^n \times \ln(a-1)} = +\infty$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a-1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n \ln(a-1)\right) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a-1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$. On a alors $u_n = 1 + \mathrm{e}^0 = 1 + 1 = 2$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 2}$$

- Si $a > 2$ alors $a-1 > 1$ donc $\ln(a-1) > 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2^n \ln(a-1)\right) = +\infty$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = +\infty$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

Exercice 4 - Partie A

Exercice 4 - Partie A

1. (a) On lit graphiquement :

Exercice 4 - Partie A

1. (a) On lit graphiquement :

$$\boxed{f(0) = 2}$$

1. (b) Il s'agit du coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

1. (b) Il s'agit du coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. On lit alors :

$$\boxed{f'(0) = -1}$$

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisse en un unique point :

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisse en un unique point : le point de coordonnées $(-2\,;\,0)$.

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisse en un unique point : le point de coordonnées $(-2\,;\,0)$. L'équation $f(x) = 0$ admet donc pour unique solution :

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisse en un unique point : le point de coordonnées $(-2\,;\,0)$. L'équation $f(x) = 0$ admet donc pour unique solution :

$$\boxed{x = -2}$$

3. On peut remarquer que sur $]-\infty\,;0]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est sous la tangente T.

3. On peut remarquer que sur $]-\infty\,;0]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est sous la tangente T. La fonction f ne peut donc pas être convexe.

3. On peut remarquer que sur $]-\infty\,;0]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est sous la tangente T. La fonction f ne peut donc pas être convexe. Plus précisément, on peut conjecturer que :

3. On peut remarquer que sur $]-\infty\,;0]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est sous la tangente T. La fonction f ne peut donc pas être convexe. Plus précisément, on peut conjecturer que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est concave sur }]-\infty\,;0] \text{ et convexe sur } [0\,;+\infty[}$$

4. Si F est une primitive de f alors $F' = f$.

4. Si F est une primitive de f alors $F' = f$. On peut alors construire le tableau de variations de F :

4. Si F est une primitive de f alors $F' = f$. On peut alors construire le tableau de variations de F :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘		↗	

4. Si F est une primitive de f alors $F' = f$. On peut alors construire le tableau de variations de F :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La seule courbe qui peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donc :

4. Si F est une primitive de f alors $F' = f$. On peut alors construire le tableau de variations de F :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La seule courbe qui peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\boxed{\text{La courbe 2}}$$

Partie B

Partie B

1. D'après la question a de la partie A, on sait que $f(0) = 2$.

Partie B

1. D'après la question a de la partie A, on sait que $f(0) = 2$. Or :

$$f(0) =$$

Partie B

1. D'après la question a de la partie A, on sait que $f(0) = 2$. Or :

$$f(0) = (a \times 0 + b)\mathrm{e}^{\lambda \times 0}$$

Partie B

1. D'après la question a de la partie A, on sait que $f(0) = 2$. Or :

$$f(0) = (a \times 0 + b)e^{\lambda \times 0} = b \times 1$$

Partie B

1. D'après la question a de la partie A, on sait que $f(0) = 2$. Or :

$$f(0) = (a \times 0 + b)e^{\lambda \times 0} = b \times 1 = b$$

Partie B

1. D'après la question a de la partie A, on sait que $f(0) = 2$. Or :

$$f(0) = (a \times 0 + b)e^{\lambda \times 0} = b \times 1 = b$$

On a donc :

$$\boxed{b = 2}$$

2. D'après la question 2 de la partie A, on sait que $f(-2) = 0$.

2. D'après la question 2 de la partie A, on sait que $f(-2) = 0$. On a alors :

$$f(-2) = 0 \iff$$

2. D'après la question 2 de la partie A, on sait que $f(-2) = 0$. On a alors :

$$f(-2) = 0 \Longleftrightarrow (a \times (-2) + b)\mathrm{e}^{\lambda \times (-2)} = 0$$

2. D'après la question 2 de la partie A, on sait que $f(-2) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(-2) = 0 &\iff (a \times (-2) + b)\mathrm{e}^{\lambda \times (-2)} = 0 \\ &\iff (-2a + b)\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0 \end{aligned}$$

2. D'après la question 2 de la partie A, on sait que $f(-2) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
f(-2) = 0 &\iff (a \times (-2) + b)\mathrm{e}^{\lambda \times (-2)} = 0 \\
&\iff (-2a + b)\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0 \\
&\iff -2a + b = 0 \quad (\textit{car } \mathrm{e}^{-2\lambda} \neq 0)
\end{aligned}$$

2. D'après la question 2 de la partie A, on sait que $f(-2) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(-2) = 0 &\iff (a \times (-2) + b)\mathrm{e}^{\lambda \times (-2)} = 0 \\ &\iff (-2a + b)\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0 \\ &\iff -2a + b = 0 \quad \textit{(car } \mathrm{e}^{-2\lambda} \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{-2a + b = 0}$$

2. D'après la question 2 de la partie A, on sait que $f(-2) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(-2) = 0 &\iff (a \times (-2) + b)\mathrm{e}^{\lambda \times (-2)} = 0 \\ &\iff (-2a + b)\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0 \\ &\iff -2a + b = 0 \quad \textit{(car } \mathrm{e}^{-2\lambda} \neq 0\textit{)} \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{-2a + b = 0}$$

Et comme $b = 2$, on a $-2a + 2 = 0$

2. D'après la question 2 de la partie A, on sait que $f(-2) = 0$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
f(-2) = 0 &\iff (a \times (-2) + b)\mathrm{e}^{\lambda \times (-2)} = 0 \\
&\iff (-2a + b)\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0 \\
&\iff -2a + b = 0 \quad (\textit{car } \mathrm{e}^{-2\lambda} \neq 0)
\end{aligned}
$$

On a donc bien :

$$\boxed{-2a + b = 0}$$

Et comme $b = 2$, on a $-2a + 2 = 0$ d'où $-2a = -2$

2. D'après la question 2 de la partie A, on sait que $f(-2) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(-2) = 0 &\iff (a \times (-2) + b)\mathrm{e}^{\lambda \times (-2)} = 0 \\ &\iff (-2a + b)\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0 \\ &\iff -2a + b = 0 \quad (\textit{car } \mathrm{e}^{-2\lambda} \neq 0) \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{-2a + b = 0}$$

Et comme $b = 2$, on a $-2a + 2 = 0$ d'où $-2a = -2$ et donc :

$$\boxed{a = 1}$$

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ.

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) =$$

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$$

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda x + 2\lambda + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda x + 2\lambda + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

On a donc $f'(0) =$

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda x + 2\lambda + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

On a donc $f'(0) = (2\lambda + 1)\mathrm{e}^{0}$

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda x + 2\lambda + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

On a donc $f'(0) = (2\lambda + 1)\mathrm{e}^0 = 2\lambda + 1$.

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)e^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda e^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)e^{\lambda x} \\ &= (\lambda x + 2\lambda + 1)e^{\lambda x} \end{aligned}$$

On a donc $f'(0) = (2\lambda + 1)e^0 = 2\lambda + 1$. Or, d'après la question 1, $f'(0) = -1$:

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda x + 2\lambda + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

On a donc $f'(0) = (2\lambda + 1)\mathrm{e}^0 = 2\lambda + 1$. Or, d'après la question 1, $f'(0) = -1$:

$$f'(0) = -1 \iff$$

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda x + 2\lambda + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

On a donc $f'(0) = (2\lambda + 1)\mathrm{e}^{0} = 2\lambda + 1$. Or, d'après la question 1, $f'(0) = -1$:

$$f'(0) = -1 \iff 2\lambda + 1 = -1$$

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda x + 2\lambda + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

On a donc $f'(0) = (2\lambda + 1)\mathrm{e}^0 = 2\lambda + 1$. Or, d'après la question 1, $f'(0) = -1$:

$$\begin{aligned} f'(0) = -1 &\iff 2\lambda + 1 = -1 \\ &\iff 2\lambda = -2 \end{aligned}$$

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda x + 2\lambda + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

On a donc $f'(0) = (2\lambda + 1)\mathrm{e}^0 = 2\lambda + 1$. Or, d'après la question 1, $f'(0) = -1$:

$$\begin{aligned} f'(0) = -1 &\iff 2\lambda + 1 = -1 \\ &\iff 2\lambda = -2 \\ &\iff \lambda = -1 \end{aligned}$$

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda x + 2\lambda + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

On a donc $f'(0) = (2\lambda+1)\mathrm{e}^0 = 2\lambda + 1$. Or, d'après la question 1, $f'(0) = -1$:

$$\begin{aligned} f'(0) = -1 &\iff 2\lambda + 1 = -1 \\ &\iff 2\lambda = -2 \\ &\iff \lambda = -1 \end{aligned}$$

On a donc $\lambda = -1$,

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda x + 2\lambda + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

On a donc $f'(0) = (2\lambda + 1)\mathrm{e}^0 = 2\lambda + 1$. Or, d'après la question 1, $f'(0) = -1$:

$$\begin{aligned} f'(0) = -1 &\iff 2\lambda + 1 = -1 \\ &\iff 2\lambda = -2 \\ &\iff \lambda = -1 \end{aligned}$$

On a donc $\lambda = -1$, soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}}$$

Partie C

Partie C

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty \end{cases}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$,

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Justifions les valeurs du tableau :

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Justifions les valeurs du tableau :

- $f(-1) =$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Justifions les valeurs du tableau :

- $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	e	$\searrow$	
	$-\infty$				0

Justifions les valeurs du tableau :

- $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = 1 \times \mathrm{e}^1$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Justifions les valeurs du tableau :

- $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = 1 \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Justifions les valeurs du tableau :

- $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = 1 \times \mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Justifions les valeurs du tableau :

- $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = 1 \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\text{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Justifions les valeurs du tableau :

- $f(-1) = (-1+2)\text{e}^{-(-1)} = 1 \times \text{e}^1 = \text{e}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\text{e}^{-x} + 2\text{e}^{-x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\text{e}^{-x} = 0$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Justifions les valeurs du tableau :

- $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = 1 \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ par croissance comparées

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Justifions les valeurs du tableau :

- $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = 1 \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ par croissance comparées et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\mathrm{e}^{-x} = 0$.

3. (a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

3. (a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f''(x) =$$

3. (a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f''(x) = -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x - 1) \times (-\mathrm{e}^{-x})$$

3. (a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (-1 + x + 1)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

3. (a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (-1 + x + 1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= x\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

3. (a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (-1 + x + 1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= x\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$ est du signe de x,

3. (a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (-1+x+1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= x\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$ est du signe de x, d'où le tableau :

3. (a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (-1+x+1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= x\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$ est du signe de x, d'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

3. (b) La fonction dérivée seconde s'annule en changeant de signe en 0

3. (b) La fonction dérivée seconde s'annule en changeant de signe en 0 donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0,

3. (b) La fonction dérivée seconde s'annule en changeant de signe en 0 donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0, c'est-à-dire au point :

$$\boxed{N(0\,;\,2)}$$

4. (a) Soit $t \geqslant 0$.

4. (a) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $x \in [-2\,; t]$, on pose :

4. (a) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $x \in [-2\,;\,t]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

4. (a) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $x \in [-2\,;\,t]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

4. (a) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $x \in [-2\,;\,t]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

4. (a) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $x \in [-2\,;\,t]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\int_{-2}^{t} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

4. (a) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $x \in [-2\,;\,t]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\int_{-2}^{t} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} - \int_{-2}^{t} -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

4. (a) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $x \in [-2\,;\,t]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{t} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} - \int_{-2}^{t} -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + (-2+2)\mathrm{e}^{2} + \int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

4. (a) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $x \in [-2\,;\,t]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x+2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{t} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} - \int_{-2}^{t} -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + (-2+2)\mathrm{e}^{2} + \int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} \end{aligned}$$

4. (a) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $x \in [-2\,;\,t]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x + 2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{t} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} - \int_{-2}^{t} -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + (-2+2)\mathrm{e}^{2} + \int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} \\
&= (-t-2)\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}
\end{aligned}$$

4. (a) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $x \in [-2\,;\,t]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x+2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{t} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} - \int_{-2}^{t} -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + (-2+2)\mathrm{e}^{2} + \int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} \\ &= (-t-2)\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2} \\ &= (-t-3)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2} \end{aligned}$$

4. (a) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $x \in [-2\,;\,t]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x+2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{t} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} - \int_{-2}^{t} -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + (-2+2)\mathrm{e}^{2} + \int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} \\
&= (-t-2)\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2} \\
&= (-t-3)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I(t) = (-t-3)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}}$$

4. (b) Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} \left((-t-3)\mathrm{e}^{-t}\right) = 0$

4. (b) Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} \left((-t-3)\mathrm{e}^{-t}\right) = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} I(t) = \mathrm{e}^2}$$

4. (b) Par croissances comparées, on a $\lim_{t \to +\infty} ((-t-3)\mathrm{e}^{-t}) = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} I(t) = \mathrm{e}^2}$$

L'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ entre -2 et $+\infty$ est donc égale à e^2.

4. (b) Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} \left((-t-3)\mathrm{e}^{-t}\right) = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} I(t) = \mathrm{e}^2}$$

L'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ entre -2 et $+\infty$ est donc égale à e^2. Il s'agit donc d'une surface non limitée dont l'aire est finie.