ANNÉE 2024 - SUJET CORRIGÉ 12

MÉTROPOLE - 20 JUIN 2024 (SUJET DÉVOILÉ)

Exercice 1

Énoncé

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans. Elle constate que 60% de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47% ont acheté la carte de fidélité.

Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38% ont acheté la carte de fidélité.

On interroge au hasard un client et on considère les événements suivants :

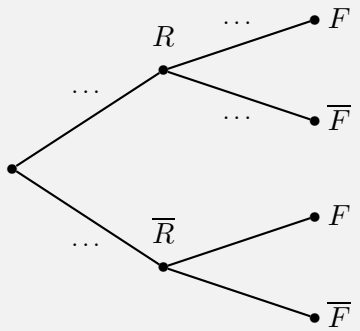
- R : « le client est un client régulier » ;
- F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un événement E quelconque, on note $\overline{E}$ son événement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1.(a) Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.

(b) Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.

(c) Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.



(d) Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80% sont des clients réguliers. Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0{,}38$.
Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.

(a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.

(b) Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.

On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1 000 clients. On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.
On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.
On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

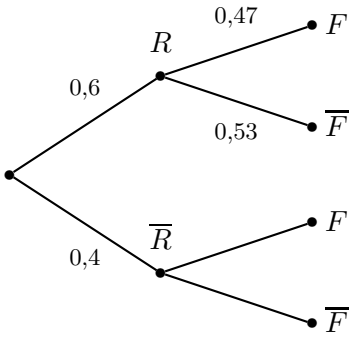
1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) au 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1\,000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice. Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,72275.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

Correction
Partie A

1.(a) On complète l'arbre de la façon suivante :



(b) Il s'agit de calculer $P(R \cap F)$:

$$\begin{aligned} P(R \cap F) &= P(R) \times P_R(F) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}47 \\ &= 0{,}282 \end{aligned}$$

La probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité est donc :

$$\boxed{P(R \cap F) = 0{,}282}$$

(c) Il s'agit de calculer $P_{\overline{R}}(F)$. Commençons par calculer $P(\overline{R} \cap F)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(F) = P(R \cap F) + P(\overline{R} \cap F)$$

On en déduit :

$$P(\overline{R} \cap F) = P(F) - P(R \cap F) = 0{,}38 - 0{,}282 = 0{,}098$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P_{\overline{R}}(F) &= \frac{P(\overline{R} \cap F)}{P(\overline{R})} \\ &= \frac{0{,}098}{0{,}4} \\ &= 0{,}245 \end{aligned}$$

La probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier est donc :

$$\boxed{P_{\overline{R}}(F) = 0{,}245}$$

(d) Calculons $P_F(R)$:

$$\begin{aligned} P_F(R) &= \frac{P(R \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{0{,}282}{0{,}38} \\ &\approx 0{,}74 \end{aligned}$$

La probabilité que le client soit un client régulier sachant qu'il a acheté la carte de fidélité est donc d'environ 0,74, soit environ 74 %. On en déduit que :

$$\boxed{\text{L'affirmation du directeur est inexacte}}$$

2.(a) On répète 20 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès égale à 0,38. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 20 \text{ et } p = 0{,}38}$$

(b) Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 5)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice que la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité parmi les 20 clients est :

$$\boxed{P(X \geqslant 5) \approx 0{,}927}$$

Partie B

1. La variable aléatoire X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0{,}47$. Son espérance est donc $E(X_2) = n \times p = 1\,000 \times 0{,}47 = 470$, soit :

$$\boxed{E(X_2) = 470}$$

Cela signifie que sur un échantillon de 1 000 clients réguliers, il y en a 470, en moyenne, qui ont acheté la carte de fidélité.

2. La variable aléatoire Z modélise :

$$\boxed{\text{Le montant moyen offert à chacun des 1 000 clients}}$$

Calculons son espérance :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E\left(\frac{Y}{1\,000}\right) \\
&= \frac{1}{1\,000}E(Y_1 + Y_2) && \textit{(linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{1\,000}\left(E(Y_1) + E(Y_2)\right) && \textit{(linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{1\,000}\left(30\,000 + 50E(X_2)\right) \\
&= \frac{1}{1\,000}\left(30\,000 + 50 \times 470\right) \\
&= 53{,}5
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{E(Z) = 53{,}5}$$

Calculons maintenant sa variance. On sait que X_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0{,}47$, sa variance est donc $V(X_2) = np(1-p) = 1\,000 \times 0{,}47 \times 0{,}53 = 249{,}1$. On en déduit, d'après une propriété de la variance que $V(Y_2) = V(50X_2) = 50^2 V(X_2) = 2\,500 \times 249{,}1 = 622\,750$. Puis, comme les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes :

$$V(Y) = V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2) = 100\,000 + 622\,750 = 722\,750$$

Et enfin $V(Z) = \dfrac{1}{1\,000^2}V(Y) = \dfrac{722\,750}{1\,000\,000}$, soit :

$$\boxed{V(Z) = 0{,}72275}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|Z - E(Z)| \geqslant 1{,}8\right) \leqslant \frac{V(Z)}{1{,}8^2}$$

Soit :

$$P\left(|Z - 53{,}5| \geqslant 1{,}8\right) \leqslant \frac{0{,}72275}{3{,}24}$$

Et, par passage à l'événement contraire :

$$P\left(53{,}5 - 1{,}8 < Z < 53{,}5 + 1{,}8\right) \geqslant 1 - \frac{0{,}72275}{3{,}24}$$

Soit :

$$P\left(51{,}7 < Z < 55{,}3\right) \geqslant 1 - \frac{0{,}72275}{3{,}24}$$

Or $1 - \dfrac{0{,}72275}{3{,}24} \approx 0{,}777$ donc on a bien :

$$\boxed{P\left(51{,}7 < Z < 55{,}3\right) \geqslant 0{,}75}$$

Commentaires

- Dans la question 2 de la partie B, on utilise différentes propriétés de la variance :
  → Si X est une variable aléatoire et a un réel, alors on a :

$$\boxed{V(aX) = a^2V(X)}$$

  → Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors :

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$$

  Attention, pour utiliser cette propriété, il faut que les variables aléatoires soient indépendantes !
- Dans la question 3 de la partie B, on utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\boxed{P\left(|X-\mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{\delta^2}}$$

avec $\delta = 1{,}8$.

Exercice 2

Énoncé

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$, on considère les points $A(0\,;\,4\,;\,-1)$, $B(6\,;\,1\,;\,5)$ et $C(6\,;\,-2\,;\,-1)$. On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases}x = 2+2t\\y = 3-t\\z = 1+2t\end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et orthogonal à la droite (AB) est $2x+2y-z-9=0$.

On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathscr{D}\ :\ \begin{cases}x = 3+t\\y = 1+t\\z = 2+t\end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}\,; \quad \mathscr{D}'\ :\ \begin{cases}x = 2t'\\y = 4-t'\\z = -1+2t'\end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Correction

Affirmation 1 : Vrai

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et :

- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times 6 + 2\times(-3) + (-1)\times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times 6 + 2\times(-6) + 0\times 6 = 12 - 6 - 6 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : Vrai

Les points A et B appartiennent tous les deux à la droite de représentation paramétrique $\begin{cases}x = 2+2t\\y = 3-t\\z = 1+2t\end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$. En effet A est le point de paramètre $t = -1$ et B le point de paramètre 2. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc bien $\begin{cases}x = 2+2t\\y = 3-t\\z = 1+2t\end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Faux

Le plan d'équation cartésienne $2x + 2y - z - 9 = 0$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}'\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Or ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$ donc ce plan n'est pas orthogonal à (AB). Il ne s'agit donc pas d'une équation du plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 : Faux

La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et la droite $\mathscr{D}'$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles. Déterminons leur intersection :

$$\begin{cases}3+t = 2t'\\1+t = 4-t'\\2+t = -1+2t'\end{cases} \iff \begin{cases}t = 2t'-3\\1+2t'-3 = 4-t'\\2+2t'-3 = -1+2t'\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}t = 2t'-3\\3t' = 6\\-1 = -1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}t = 1\\t' = 2\end{cases}$$

Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont donc sécantes et le point d'intersection est le point de paramètre $t = 1$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ et de paramètre $t' = 2$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}'$, soit le point de coordonnées $(4\,;\,2\,;\,3)$. Les droites étant sécantes, elles sont coplanaires.

Commentaires

- Pour l'affirmation 4, j'ai commencé par regarder si les droites étaient parallèles. Cela n'était finalement pas nécessaire car on démontre ensuite qu'elles sont sécantes en un unique point ce qui prouve également qu'elles ne sont pas parallèles.

Exercice 3

Énoncé

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$.

1.(a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.

2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.

(a) En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n < 2$$

(b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$.

1. On donne ci-contre la fonction `u` écrite en langage Python.
Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit `u(2,1)` et `u(2,2)` dans la console Python.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n):
        u=u**2-2*u+2
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$? On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général.

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}$.

2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n).

Correction
Partie A

1.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= u_n^2 - 2u_n + 2 - 2 \\ &= u_n^2 - 2u_n \\ &= u_n(u_n - 2) \qquad \textit{(factorisation par } u_n\textit{)} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'une part :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} (u_n - 1)(u_n - 2) &= u_n^2 - 2u_n - u_n + 2 \\ &= u_n^2 - 3u_n + 2 \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)}$$

2.(a) Montrons par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < 2$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = a$ et, dans cette partie, on a supposé $1 < a < 2$. On a donc $u_0 < 2$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n < 2$. On sait, d'après la question 1a, que :
  $$u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$$
  Or d'après l'énoncé, $u_n > 1$ et, par hypothèse de récurrence, $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit $u_n(u_n - 2) < 0$, soit $u_{n+1} - 2 < 0$ et donc :
  $$u_{n+1} < 2$$
  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$\boxed{u_n < 2}$$

(b)
- D'après la question 1b, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$. Or $u_n > 1$ donc $u_n - 1 > 0$ et $u_n < 2$ donc $u_n - 2 < 0$. On en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0$ donc que la suite (u_n) est décroissante.
- D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. La suite (u_n) est donc minorée par 1.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée, on en déduit que :
  $$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$
- Déterminons alors sa limite l. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 - 2x + 2$. La suite (u_n) étant convergente et la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 - 2x + 2 = x \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \end{aligned}$$
  Il s'agit d'une équation du second degré qui admet deux racines : 1 et 2. Et comme la suite (u_n) est décroissante et $u_0 < 2$, la suite ne peut pas converger vers 2. On en déduit :
  $$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

Partie B

1. La commande `u(2,1)` renvoie la valeur de u_1 dans le cas où $a = 2$. Or, dans ce cas, on a $u_1 = 2^2 - 2 \times 2 + 2 = 4 - 4 + 2 = 2$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La commande } \texttt{u(2,1)} \text{ renvoie la valeur 2}}$$

De même la commande `u(2,2)` renvoie la valeur de u_2 dans le cas où $a = 2$. Or, dans ce cas, $u_2 = 2$ donc :

$$\boxed{\text{La commande } \texttt{u(2,2)} \text{ renvoie la valeur 2}}$$

2. On peut conjecturer que dans la cas où $a = 2$:

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est constante égale à 2}}$$

Partie C

1.(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1} - 1) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) \\ &= \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 1\right) \\ &= \ln\left((u_n - 1)^2\right) \\ &= 2\ln(u_n - 1) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

De plus $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln(a - 1)$ donc :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison 2 et de } 1^{\text{er}} \text{ terme } v_0 = \ln(a-1)}$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times 2^n$, soit :

$$v_n = \ln(a-1) \times 2^n$$

Et comme $v_n = \ln(u_n - 1)$, on a $u_n - 1 = \mathrm{e}^{v_n}$, soit $u_n = 1 + \mathrm{e}^{v_n}$ et donc :

$$\boxed{u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}}$$

2. Distinguons les cas :

- Si $1 < a < 2$ alors $0 < a-1 < 1$ donc $\ln(a-1) < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n \ln(a-1)) = -\infty$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = 0$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

- Si $a = 2$ alors $a - 1 = 1$ donc $\ln(a-1) = 0$. On a alors $u_n = 1 + \mathrm{e}^0 = 1 + 1 = 2$ et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$$

- Si $a > 2$ alors $a - 1 > 1$ donc $\ln(a-1) > 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n \ln(a-1)) = +\infty$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)} = +\infty$ et enfin :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Commentaires

- Pour montrer l'égalité de la question 1b de la partie A, il n'est pas aisé de partir d'un membre pour arriver à l'autre. Il est donc plus simple d'opter pour une présentation de la forme « d'une part... d'autre part... ». Cependant on aurait tout de même pu dérouler les calculs directement en remarquant que le polynôme $x^2 - 3x + 2$ admet deux racines : 1 et 2. Il peut donc se factoriser de la façon suivante :

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

D'où l'égalité :

$$u_n^2 - 3u_n + 2 = (u_n - 1)(u_n - 2)$$

- Dans la question 2a, on démontre que la suite (u_n) est majorée par 2. Au vu de l'enchaînement des questions, on pense que l'on va devoir utiliser ce résultat dans la suite. Il n'en ai rien car pour montrer la convergence de la suite, on utilise le fait que celle-ci est minorée par 1 et on n'a que faire de savoir qu'elle est majorée par 2. Est-ce un piège ? Je ne sais pas.
- Dans la question 2b, pour la résolution de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$, on peut, au choix :
  - → Utiliser directement la calculatrice qui sait très bien résoudre ce type d'équation.
  - → Remarquer que le nombre 1 est racine évidente et utiliser le fait que le produit des racines est égal à $\frac{c}{a}$ (avec les notations habituelles).
  - → Calculer le discriminant et appliquer les formules.
- Dans la question 2 de la partie B, on conjecture que la suite (u_n) est constante égale à 2. Ce résultat peut se démontrer à l'aide d'une récurrence très rapide. Plus précisément, on montre par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété « $u_n = 2$ ».

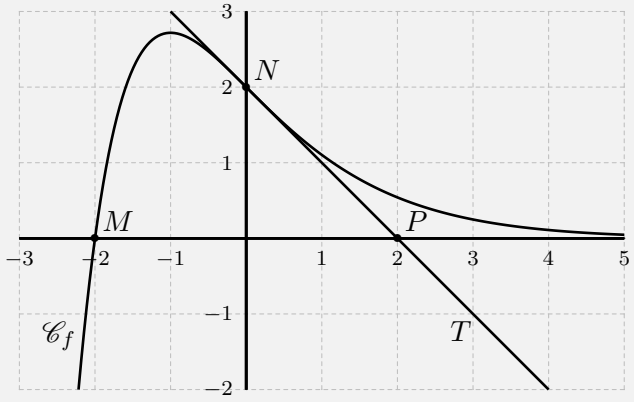
Exercice 4

Énoncé

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.
Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point $N(0\,;\,2)$;
- le point $M(-2\,;\,0)$ appartenant à $\mathscr{C}_f$ et $P(2\,;\,0)$ appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1]$.



Partie A : étude graphique.
On répondra aux questions en utilisant le graphique.

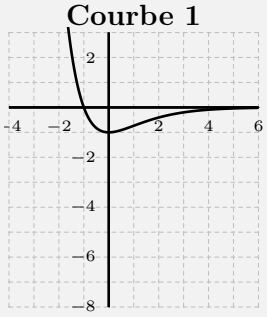
1.(a) Donner $f(0)$.
(b) Déterminer $f'(0)$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

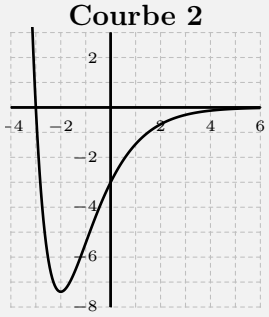
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

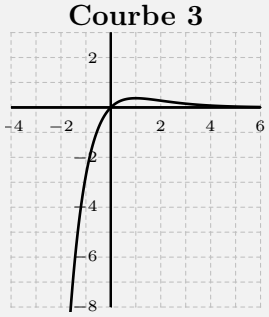
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Partie B : recherche d'une expression algébrique.
On admet que la fonction f est de la forme $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{\lambda x}$, où a, b et λ sont des constantes réelles. Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.

2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.

3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique.
On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. On admet que $f'(x) = (-x - 1)\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.

3.(a) Étudier la convexité de f.
(b) Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

4. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on pose :

$$I(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I(t) = (-t - 3)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^2.$$

(b) En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.

Correction

Partie A

1.(a) On lit graphiquement :

$$\boxed{f(0) = 2}$$

(b) Il s'agit du coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0. On lit alors :

$$\boxed{f'(0) = -1}$$

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisse en un unique point : le point de coordonnées $(-2\,;\,0)$. L'équation $f(x) = 0$ admet donc pour unique solution :

$$\boxed{x = -2}$$

3. On peut remarquer que sur $]-\infty\,;\,0]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est sous la tangente T. La fonction f ne peut donc pas être convexe. Plus précisément, on peut conjecturer que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est concave sur }]-\infty\,;\,0] \text{ et convexe sur } [0\,;\,+\infty[}$$

4. Si F est une primitive de f alors $F' = f$. On peut alors construire le tableau de variations de F :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘		↗	

La seule courbe qui peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\boxed{\text{La courbe 2}}$$

Partie B

1. D'après la question 1a de la partie A, on sait que $f(0) = 2$. Or :

$$f(0) = (a \times 0 + b)\mathrm{e}^{\lambda \times 0} = b \times 1 = b$$

On a donc :

$$\boxed{b = 2}$$

2. D'après la question 2 de la partie A, on sait que $f(-2) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(-2) = 0 &\iff (a \times (-2) + b)\mathrm{e}^{\lambda \times (-2)} = 0 \\ &\iff (-2a + b)\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0 \\ &\iff -2a + b = 0 \qquad (\textit{car } \mathrm{e}^{-2\lambda} \neq 0) \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{-2a + b = 0}$$

Et comme $b = 2$, on a $-2a + 2 = 0$ d'où $-2a = -2$ et donc :

$$\boxed{a = 1}$$

3. On sait maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$. Il reste donc à déterminer la valeur de λ. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{\lambda x} + (x+2) \times \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (1 + \lambda x + 2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x} \\ &= (\lambda x + 2\lambda + 1)\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

On a donc $f'(0) = (2\lambda + 1)\mathrm{e}^0 = 2\lambda + 1$. Or, d'après la question 1b, $f'(0) = -1$:

$$\begin{aligned} f'(0) = -1 &\iff 2\lambda + 1 = -1 \\ &\iff 2\lambda = -2 \\ &\iff \lambda = -1 \end{aligned}$$

On a donc $\lambda = -1$, soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}}$$

Partie C

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (x+2) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty \end{cases}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-x-1)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e	↘	0

Justifions les valeurs du tableau :

- $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)} = 1 \times \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ par croissance comparées et $\lim\limits_{x \to +\infty} 2\mathrm{e}^{-x} = 0$.

3.(a) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (-x-1) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (-1 + x + 1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= x\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$ est du signe de x, d'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

(b) La fonction dérivée seconde s'annule en changeant de signe en 0 donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0, c'est-à-dire au point :

$$\boxed{N(0\,;\,2)}$$

4.(a) Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $x \in [-2\,;\,t]$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = x+2 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{t} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \Big[-(x+2)\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} - \int_{-2}^{t} -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + (-2+2)\mathrm{e}^{2} + \int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -(t+2)\mathrm{e}^{-t} + \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_{-2}^{t} \\ &= (-t-2)\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2} \\ &= (-t-3)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I(t) = (-t-3)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}}$$

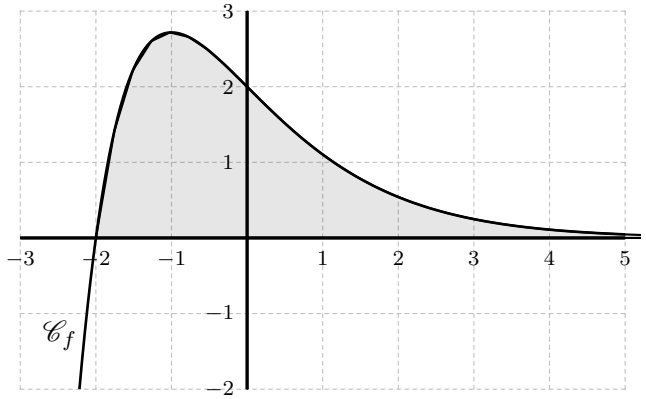
(b) Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \big((-t-3)\mathrm{e}^{-t}\big) = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} I(t) = \mathrm{e}^{2}}$$

L'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$ entre -2 et $+\infty$ est donc égale à e^2. Il s'agit donc d'une surface non limitée dont l'aire est finie.

Commentaires

- Dans la question 2 de la partie C, on peut justifier ainsi l'étude du signe de $-x-1$:

$$\begin{aligned} -x-1 \geqslant 0 &\iff -x \geqslant 1 \\ &\iff x \leqslant -1 \end{aligned}$$

- Le domaine considéré dans la question 4b de la partie C est grisé sur la figure suivante :