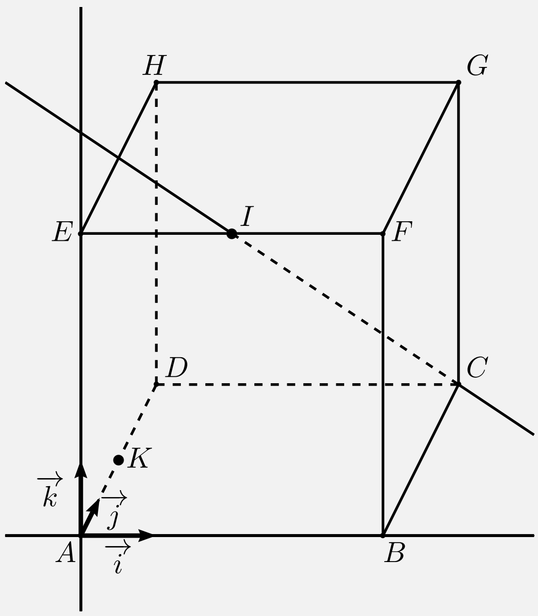
ANNÉE 2024 - SUJET CORRIGÉ 11

MÉTROPOLE - 19 JUIN 2024 (SUJET DE SECOURS)

Exercice 1

Énoncé

On considère le repère orthonormé $(A\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ de l'espace dans lequel on place les points $B(4\,;0\,;0)$, $D(0\,;4\,;0)$, $E(0\,;0\,;4)$ et les points C, F, G et H de sorte que le solide $ABCDEFGH$ soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.
2. On considère le point I milieu de l'arête $[EF]$.
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par P le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de P avec (IC).
   (a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan P est donnée par :

$$x + 2y - 2z - 4 = 0$$

   (b) Justifier que J a pour coordonnées $\left(\dfrac{28}{9}\,;\,\dfrac{20}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$. Que représente J par rapport à C ?

   (c) Vérifier que le point $K(0\,;\,2\,;\,0)$ appartient au plan P.
   (d) Justifier que (BK) est l'intersection des plans P et (ABC).

4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{\mathscr{B} \times h}{3}$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
   (a) Déterminer le volume de la pyramide $CBKG$.
   (b) En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.
5. Justifier que la droite (BG) est incluse dans P.
6. On note I' un point de l'arête $[EF]$, et P' le plan orthogonal à la droite $(I'C)$ passant par G. Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P' ?

Correction

1. On a les coordonnées :

$$\boxed{C(4\,;\,4\,;\,0)} \qquad \boxed{F(4\,;\,0\,;\,4)} \qquad \boxed{G(4\,;\,4\,;\,4)} \qquad \boxed{H(0\,;\,4\,;\,4)}$$

2. On a :

$$I\left(\frac{0+4}{2}\,;\,\frac{0+0}{2}\,;\,\frac{4+4}{2}\right) \quad \text{soit} \quad I(2\,;\,0\,;\,4)$$

Et :

$$\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}4-2\\4-0\\0-4\end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$$

La droite (IC) passe donc par le point $I(2\,;\,0\,;\,4)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases}x = 2+2t\\ y = 4t\\ z = 4-4t\end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}}$$

3. (a) Le plan P admet le vecteur $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$ pour vecteur normal donc également le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, il a donc une équation cartésienne de la forme :

$$x + 2y - 2z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point $G(4\,;\,4\,;\,4)$ appartient au plan P donc ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $4 + 2 \times 4 - 2 \times 4 + d = 0$, soit $4 + d = 0$ et donc $d = -4$. On en déduit une équation cartésienne du plan P :

$$\boxed{x + 2y - 2z - 4 = 0}$$

   (b) J étant le point d'intersection du plan P et de la droite (IC), ses coordonnées vérifient à la fois l'équation cartésienne de P et la représentation paramétrique de (IC). On injecte donc les expressions de la représentation paramétrique de (IC) dans l'équation cartésienne de P :

$$\begin{aligned}(2+2t) + 2(4t) - 2(4-4t) - 4 = 0 &\iff 2 + 2t + 8t - 8 + 8t - 4 = 0\\ &\iff 18t = 10\\ &\iff t = \frac{10}{18}\\ &\iff t = \frac{5}{9}\end{aligned}$$

Le point J est donc le point de paramètre $t=\dfrac{5}{9}$ dans la représentation paramétrique de la droite (IC), soit le point de coordonnées $\left(2+2\times\dfrac{5}{9}\,;\,4\times\dfrac{5}{9}\,;\,4-4\times\dfrac{5}{9}\right)$. On a donc :

$$\boxed{J\left(\frac{28}{9}\,;\,\frac{20}{9}\,;\,\frac{16}{9}\right)}$$

Le point J est à l'intersection entre le plan P et la droite passant par C orthogonalement à C. On en déduit que :

$$\boxed{J \text{ est le projeté orthogonal de } C \text{ sur le plan } P}$$

(c) On a :

$$0+2\times 2-2\times 0-4=4-4=0$$

Les coordonnées du point K vérifient l'équation cartésienne de P donc :

$$\boxed{\text{Le point } K \text{ appartient au plan } P}$$

(d) Les plans P et (ABC) ne sont pas parallèles, ils sont donc sécants suivant une droite. De plus :

- Le point B appartient au plan P car ses coordonnées vérifient l'équation de P ($4+2\times 0-2\times 0-4=0$) et il appartient aussi au plan (ABC) (par définition de ce plan).
- Le point K appartient au plan P (d'après la question précédente) et il appartient au plan (ABC) (car il appartient à la droite (AD)).

Les points B et K appartenant tous deux aux plans P et (ABC), on en déduit que :

$$\boxed{\text{La droite } (BK) \text{ est l'intersection des plans } P \text{ et } (ABC)}$$

4.(a) Afin de calculer le volume de la pyramide $CBKG$, on peut choisir la face CBK pour base. La hauteur correspondante est alors le segment $[CG]$. L'aire $\mathscr{A}_{CBK}$ du triangle CBK est :

$$\mathscr{A}_{CBK}=\frac{4\times 4}{2}=8$$

Et le volume $\mathscr{V}_{CBKG}$ est donné par :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{CBKG}&=\frac{1}{3}\times\mathscr{A}_{CBK}\times CG\\&=\frac{1}{3}\times 8\times 4\\&=\frac{32}{3}\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{V}_{CBKG}=\frac{32}{3}}$$

(b) D'autre part, on peut exprimer le volume de la pyramide $CBKG$ en choisissant pour base le triangle BKG. La hauteur correspondante est alors le segment $[CJ]$ et :

$$\begin{aligned}CJ&=\sqrt{\left(\frac{28}{9}-4\right)^2+\left(\frac{20}{9}-4\right)^2+\left(\frac{16}{9}-0\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{64}{81}+\frac{256}{81}+\frac{256}{81}}\\&=\sqrt{\frac{576}{81}}\\&=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

On a alors, on notant $\mathscr{A}_{BKG}$ l'aire du triangle BKG :

$$\mathscr{V}_{CBKG} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{BKG} \times CJ = \frac{8}{9}\mathscr{A}_{BKG}$$

Et comme, d'après la question précédente, $\mathscr{V}_{CBKG} = \dfrac{32}{3}$, on a :

$$\frac{8}{9}\mathscr{A}_{BKG} = \frac{32}{3}$$

Et donc :

$$\mathscr{A}_{BKG} = \frac{32}{3} \times \frac{9}{8}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{A}_{BKG} = 12}$$

5. Les points B et G appartiennent tous deux au plan P donc :

$$\boxed{\text{La droite } (BG) \text{ est incluse dans } P}$$

6. I' étant un point de l'arête (EF), il existe $x \in [0\,;\,4]$ tel que :

$$I'\,(x\,;\,0\,;\,4) \quad \text{et donc} \quad \overrightarrow{CI'}\begin{pmatrix} x-4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Le plan P' étant orthogonal à la droite $(I'C)$, il admet le vecteur $\overrightarrow{CI'}$ pour vecteur normal. D'autre part, on a $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et donc :

$$\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{CI'} = 0 \times (x-4) + 4 \times 4 + 4 \times (-4) = 16 - 16 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CI'}$ sont donc orthogonaux et comme le point B appartient au plan P', le point G appartient également au plan P' et finalement :

$$\boxed{\text{La droite } (BG) \text{ est incluse dans le plan } P'}$$

Commentaires

- Dans la question 3b, on pouvait également vérifier que le point de coordonnées $\left(\dfrac{28}{9}\,;\,\dfrac{20}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$ appartenait bien à la fois au plan P (on vérifie que les coordonnées vérifient l'équation cartésienne de P) et à la droite (IC) (on montre qu'il existe un paramètre t pour lequel on obtient ces coordonnées).

Exercice 2

Énoncé

Partie A

Suite à une étude statistique réalisée dans la station-service Carbuplus, on évalue à 0,25 la probabilité qu'un client venant alimenter son véhicule en carburant passe moins de 12 minutes dans la station avant de la quitter.
On choisit au hasard et de façon indépendante 10 clients de la station et on assimile ce choix à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 10 clients associe le nombre de ces clients ayant passé moins de 12 minutes à la station.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 4 clients dans un échantillon de 10 passent moins de 12 minutes à la station ? On arrondira si besoin le résultat à 10^{-3} près.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.
On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.

On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3.
2. (a) Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client ?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

Correction

Partie A

1. On répète 10 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès égale à 0,25. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 10 \text{ et } p = 0{,}25}$$

2. Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 4)$. On obtient à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'au moins 4 clients dans un échantillon de 10 passent moins de 12 minutes à la station est :

$$\boxed{P(X \geqslant 4) \approx 0{,}224}$$

3. On a $E(X) = n \times p = 10 \times 0{,}25 = 2{,}5$. Cela signifie que sur un échantillon de 10 clients, le nombre moyen de clients qui passent moins de 12 minutes à la station est :

$$\boxed{E(X) = 2{,}5}$$

Partie B

1. La variable aléatoire est égale au temps total donc à la somme des 3 temps, soit :

$$\boxed{S = T_1 + T_2 + T_3}$$

2.(a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) = 6 + 6 + 6 = 18$$

Cela signifie que le temps d'attente moyen de ce troisième client, en minutes, est :

$$\boxed{E(S) = 18}$$

(b) Les variables aléatoires T_1, T_2 et T_3 étant indépendantes, on a :

$$V(S) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3) = 1 + 1 + 1 = 3$$

La variance du temps d'attente total S de ce troisième client est donc :

$$\boxed{V(S) = 3}$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|S - E(S)| \geqslant 4\right) \leqslant \frac{V(S)}{4^2}$$

Soit :

$$P\left(|S - 18| \geqslant 4\right) \leqslant \frac{3}{16}$$

Et, par passage au complémentaire :

$$P\left(|S - 18| < 4\right) \geqslant 1 - \frac{3}{16}$$

Soit :

$$P(14 < S < 22) \geqslant \frac{13}{16}$$

Or $\dfrac{13}{16} = 0{,}8125 \geqslant 0{,}81$ donc la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est :

$$\boxed{P(14 < S < 22) \geqslant 0{,}81}$$

Commentaires

- Dans la question 3 de la partie B, on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\boxed{P\left(|S - \mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{\delta^2}}$$

où $\mu = E(S)$, $V = V(S)$ et en prenant $\delta = 4$ afin d'obtenir l'encadrement souhaité.

Exercice 3

Énoncé

Partie A : étude d'une fonction.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   (a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a :
   $$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$
   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :
   $$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$
3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite.
On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :
   $$u_n \geqslant 0$$
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite (u_n).
4. On note l la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de l.
5. (a) Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leqslant h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```python
from math import log as ln
#permet d'utiliser la function ln :
#Le Logarithme népérien

def seuil(h):
    n=0
    u=7
    while ... :
        n = n + 1
        u = ...
    return n
```

   (b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit `seuil(0.01)` dans la console Python. Justifier la réponse.

Partie C : calcul intégral.

1. Étudier le signe de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Interpréter graphiquement l'intégrale :
$$I = \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;\,4]$, on a l'encadrement :
$$0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25$$
En déduire l'encadrement :
$$1 \leqslant I \leqslant 2.$$

Correction
Partie A

1.(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{2x}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} \\ &= \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} \\ &= \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}}$$

(b) On a alors le tableau :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
x^2+1		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↗	

La dérivée étant strictement positive sauf en un point où elle s'annule, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$$

2. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) &= x - \ln\left(x^2\right) - \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \\ &= x - \ln\left(x^2\right) - \left(\ln\left(x^2+1\right) - \ln\left(x^2\right)\right) \\ &= x - \ln\left(x^2\right) - \ln\left(x^2+1\right) + \ln\left(x^2\right) \\ &= x - \ln\left(x^2+1\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On a donc bien, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

3. Pour tout $x > 0$, on a :

$$f(x) = x\left(1 - 2\times\frac{\ln(x)}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

Or, par croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - 2\times\frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$$

Et :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 7 \geqslant 0$. La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

     $$u_n \geqslant 0$$

     On en déduit, en appliquant la fonction f qui est croissante sur $[0\,;+\infty[$:

     $$f(u_n) \geqslant f(0)$$

     Et comme $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$, on a :

     $$f(u_n) \geqslant 0$$

     Soit :

     $$u_{n+1} \geqslant 0$$

     La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion :**
     La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

     $$\boxed{u_n \geqslant 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= u_n - \ln(u_n^2 + 1) - u_n \\ &= -\ln(u_n^2 + 1) \end{aligned}$$

Or $u_n^2 \geqslant 0$ donc $u_n^2 + 1 \geqslant 1$ puis $\ln(u_n^2 + 1) \geqslant 0$ et finalement :

$$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$$

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$

4. La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. De plus, on sait que la suite (u_n) converge. On en déduit que la limite l est un point fixe de f, c'est-à-dire que $f(l) = l$. Résolvons alors l'équation $f(x) = x$, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x - \ln\left(x^2 + 1\right) = x \\ &\iff \ln\left(x^2 + 1\right) = 0 \\ &\iff x^2 + 1 = 1 \\ &\iff x^2 = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{l = 0}$$

5.(a) On peut compléter le script de la façon suivante :

```
from math import log as ln

def seuil(h) :
    n = 0
    u = 7
    while u > h :
        n = n + 1
        u = u-ln(u**2 + 1)
    return n
```

(b) La valeur renvoyée lorsque l'on saisit `seuil(0.01)` est la valeur du plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 0{,}01$. Or on obtient à l'aide de la calculatrice :

- $u_{96} \approx 0{,}01003 > 0{,}01$
- $u_{97} \approx 0{,}0099 < 0{,}01$

La valeur renvoyée est donc :

$$\boxed{97}$$

Partie C

1. La fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et $f(0) = 0$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est positive sur } [0\,;\,+\infty[}$$

2. La fonction f étant positive sur l'intervalle $[2\,;\,4]$, l'intégrale I est égale à l'aire, en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$.
3. On admet que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;\,4]$:

$$0{,}5x - 1 \leqslant f(x) \leqslant 0{,}25x + 0{,}25$$

On a alors, par croissance de l'intégrale :

$$\int_2^4 0{,}5x - 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_2^4 0{,}25x + 0{,}25\,\mathrm{d}x$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_2^4 0{,}5x - 1\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{4}x^2 - x\right]_2^4\\ &= \left(\frac{1}{4}\times 4^2 - 4\right) - \left(\frac{1}{4}\times 2^2 - 2\right)\\ &= 0 - (-1)\\ &= 1\end{aligned}$$

Et :

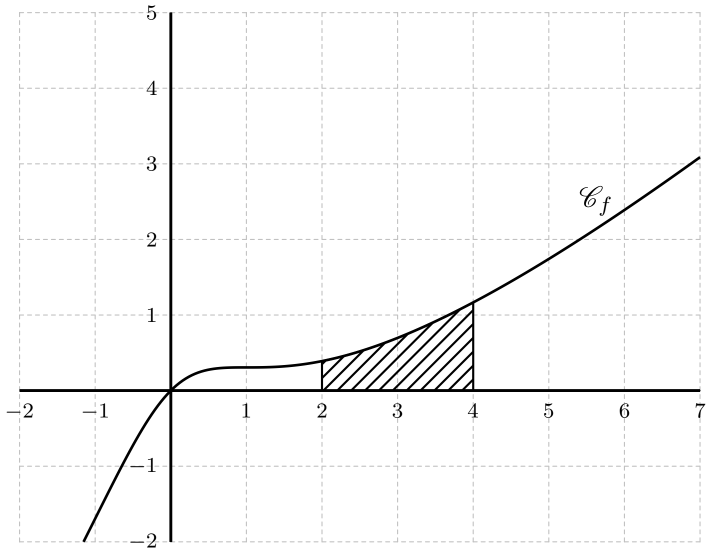
$$\begin{aligned}\int_2^4 0{,}25x + 0{,}25\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x\right]_2^4\\ &= \left(\frac{1}{8}\times 4^2 + \frac{1}{4}\times 4\right) - \left(\frac{1}{8}\times 2^2 + \frac{1}{4}\times 2\right)\\ &= 3 - 1\\ &= 2\end{aligned}$$

On en déduit l'encadrement :

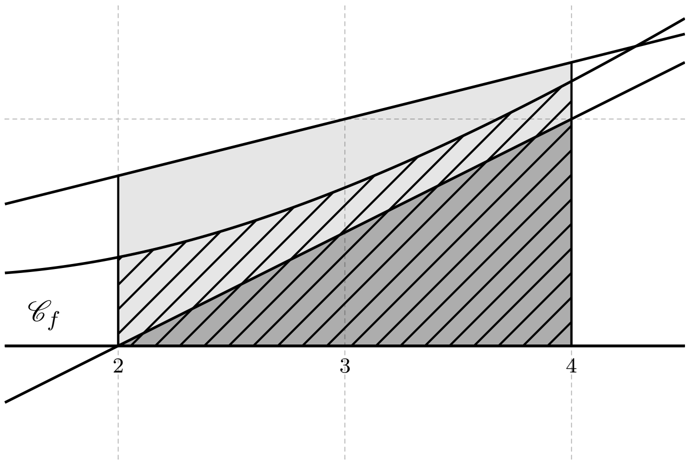
$$\boxed{1 \leqslant I \leqslant 2}$$

Commentaires

- Voici la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ainsi que le domaine correspondant à l'intégrale étudiée dans la partie C :



- Dans la question 3 de la partie C, l'encadrement de l'intégrale provient de l'encadrement de la fonction f par deux fonctions affines dont les représentations graphiques sont données ci-dessous. L'aire du domaine hachuré (égale à l'intégrale) est encadrée par les aires des parties grisées (claire et foncée). Et dans cette même question, le calcul des intégrales aurait pu se faire de manière géométrique, l'une correspondant à l'aire d'un triangle et l'autre à l'aire d'un trapèze.



Exercice 4

Énoncé

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

(a) **Affirmation 1 :**
La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

(b) **Affirmation 2 :**
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{f(x)-5} = +\infty$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

(a) **Affirmation 3 :**
Le point $A\left(2\,;\,\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.

(b) **Affirmation 4 :**
Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\,;\,2[$, on a : $g(x) \leqslant x$.

3. **Affirmation 5 :**
L'équation $x\ln x = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Correction

1.(a) **Affirmation 1 : Faux**

D'après la tableau de variations, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet :

- Une asymptote horizontale d'équation $y = 5$ en $-\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$)
- Une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$)
- Une asymptote verticale d'équation $x = -2$ (car $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = -\infty$)

Mais elle n'admet pas la droite d'équation $y = -2$ pour asymptote horizontale.

(b) **Affirmation 2 : Faux**

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5^-$, c'est-à-dire que lorsque x tend vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers 5 avec $f(x) < 5$. Cela découle du fait que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$ et que la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-2[$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 5) = 0^-$ et donc que :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{f(x)-5} = -\infty$$

2.(a) **Affirmation 3 : Vrai**

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (1-x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

La fonction g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g''(x) &= -1 \times \mathrm{e}^{-x} + (1-x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (x-2)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
g		concave		convexe	

La fonction g'' s'annule en changeant de signe en 2 donc la courbe $\mathscr{C}_g$ admet un point d'inflexion en 2. Or $g(2) = 2\mathrm{e}^{-2}$ donc le point d'inflexion est le point de coordonnées :

$$\left(2\,;\,\frac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$$

(b) **Affirmation 4 : Vrai**

On a vu que la fonction g était concave sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2[$. La courbe $\mathscr{C}_g$ est donc en dessous de ses tangentes et, en particulier en dessous de sa tangente au point d'abscisse 0. Or $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$ donc la tangente au point d'abscisse 0 admet pour équation $y = 1(x-0)+0$, soit $y = x$. On en déduit que, pour tout $x \in\,]-\infty\,;\,2[$:

$$\boxed{g(x) \leqslant x}$$

3. **Affirmation 5 : Faux**

Soit h la fonction définie, pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$, par $h(x) = x\ln(x)$.
On a $\lim\limits_{x\to0} h(x) = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.
De plus la fonction h est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} h'(x) \geqslant 0 &\iff \ln(x) + 1 \geqslant 0 \\ &\iff \ln(x) \geqslant -1 \\ &\iff x \geqslant \mathrm{e}^{-1} \end{aligned}$$

D'où le tableau :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$h(x)$	|| 0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

On déduit du tableau de variations que :

- L'équation $h(x) = 1$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right]$.
- D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$.

Finalement, l'équation $x \ln x = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Commentaires

- Voici la courbe représentative de la fonction g de question 2 ainsi que le point d'inflexion A et la tangente en ce point (qui traverse la courbe).