ANNÉE 2024 - SUJET CORRIGÉ 10

POLYNÉSIE - 20 JUIN 2024

Exercice 1

Énoncé

Un sondage réalisé en France fournit les informations suivantes :

- 60 % des plus de 15 ans ont l'intention de regarder les jeux Olympiques et Paralympiques (JOP) de Paris 2024 à la télévision ;
- parmi ceux qui ont l'intention de regarder les JOP, 8 personnes sur 9 déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

On choisit au hasard une personne de plus de 15 ans. On considère les évènements suivants :

- J : « la personne a l'intention de regarder les JOP Paris 2024 à la télévision » ;
- S : « la personne choisie déclare pratiquer une activité sportive régulière ».

On note $\overline{J}$ et $\overline{S}$ leurs évènements contraires.

Dans les questions 1. et 2., les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

1. Démontrer que la probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est de $\dfrac{8}{15}$.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

Selon ce sondage, deux personnes sur trois parmi les plus de 15 ans déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

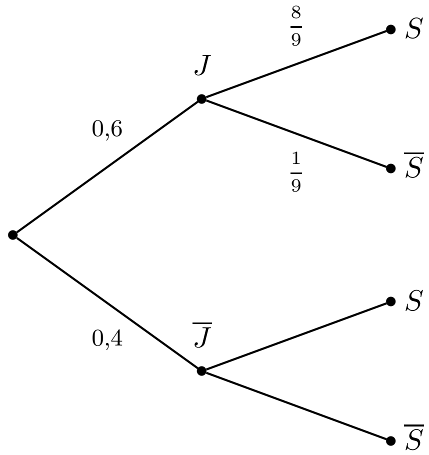
2. (a) Calculer la probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière.
   (b) En déduire la probabilité de S sachant $\overline{J}$ notée $P_{\overline{J}}(S)$.

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

3. Dans le cadre d'une opération de promotion, 30 personnes de plus de 15 ans sont choisies au hasard.
   On assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.
   (a) Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   (b) Calculer la probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.
   (c) La fédération française de judo souhaite offrir une place pour la finale de l'épreuve par équipe mixte de judo à l'Arena Champ-de-Mars pour chaque personne déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi ces 30 personnes.
   Le prix d'une place s'élève à 380 € et on dispose d'un budget de 10 000 euros pour cette opération.
   Quelle est la probabilité que ce budget soit insuffisant ?

Correction

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Il s'agit alors de calculer $P(J \cap S)$:

$$\begin{aligned} P(J \cap S) &= P(J) \times P_J(S) \\ &= 0{,}6 \times \frac{8}{9} \\ &= \frac{6}{10} \times \frac{8}{9} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

La probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est donc bien :

$$\boxed{P(J \cap S) = \frac{8}{15}}$$

2.(a) Il s'agit de calculer $P(\overline{J} \cap S)$. Les événements J et $\overline{J}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(J \cap S) + P(\overline{J} \cap S)$$

Or, d'après l'énoncé, $P(S) = \dfrac{2}{3}$ et, d'après la question précédente, $P(J \cap S) = \dfrac{8}{15}$. On en déduit :

$$P(\overline{J} \cap S) = \frac{2}{3} - \frac{8}{15} = \frac{2}{15}$$

La probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est donc :

$$\boxed{P(\overline{J} \cap S) = \frac{2}{15}}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} P_{\overline{J}}(S) &= \frac{P(\overline{J} \cap S)}{P(\overline{J})} \\ &= \frac{\frac{2}{15}}{0{,}4} \\ &= \frac{2}{15} \times \frac{10}{4} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La probabilité que la personne pratique une activité sportive régulière sachant qu'elle n'a pas l'intention de regarder les JOP est donc :

$$\boxed{P_{\overline{J}}(S) = \frac{1}{3}}$$

3.(a) On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à $\frac{2}{3}$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = \frac{2}{3}}$$

(b) Il s'agit de calculer $P(X = 16)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice que la probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes est :

$$\boxed{P(X = 16) \approx 0{,}046}$$

(c) Le budget de 10 000 euros permet de payer 26 places, il s'agit donc de calculer $P(X \geqslant 27)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité que ce budget soit insuffisant est :

$$\boxed{P(X \geqslant 27) \approx 0{,}003}$$

Commentaires

- Dans la question 3b, on aurait pu utiliser la formule :

$$P(X = 16) = \binom{30}{16} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{16} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{14}$$

Exercice 2

Énoncé

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend cinq questions. Les cinq questions sont indépendantes.
Pour chacune des questions, ***une seule des quatre réponses est exacte****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

1. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

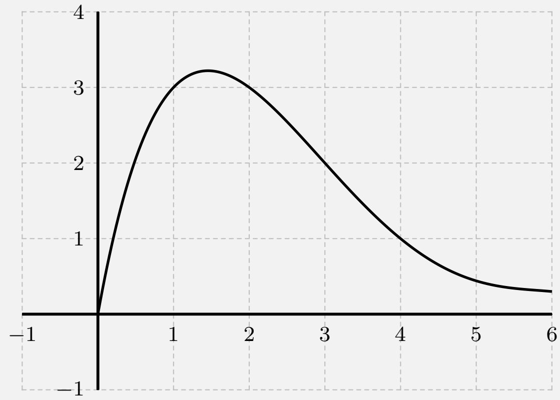
A. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$

B. $f(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-3x} + \frac{7}{3}$

C. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \frac{7}{3}$

D. $f(x) = -\frac{10}{3}\mathrm{e}^{-3x} - \frac{7}{3}$

2. La courbe d'une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ est donnée ci-dessous.



Un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est :

A. $0 \leqslant I \leqslant 4$ B. $1 \leqslant I \leqslant 5$
C. $5 \leqslant I \leqslant 10$ D. $10 \leqslant I \leqslant 15$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 \ln(x^2 + 4)$.
Alors $\displaystyle\int_0^2 g'(x)\,\mathrm{d}x$ vaut, à 10^{-1} près :

A. 4,9 B. 8,3
C. 1,7 D. 7,5

4. Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale.
Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

A. 31^5 B. $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$
C. $31 + 30 + 29 + 28 + 27$ D. $\binom{31}{5}$

5. La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :
- 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
- 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
- 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

A. $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$ B. $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$
C. $\binom{20}{3}$ D. $20^3 \times 11^2$

Correction

1. **Réponse B**
L'équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -3$ et $b = 7$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, soit les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda e^{-3x} + \frac{7}{3} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

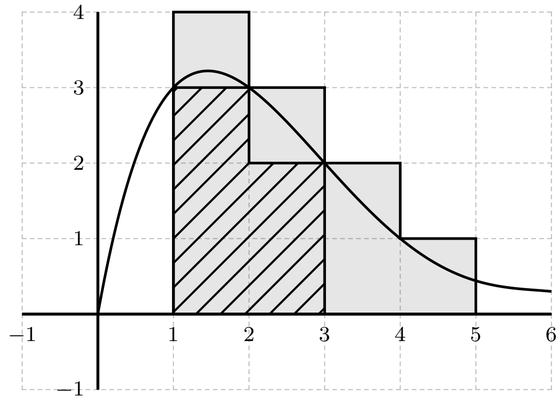
Soit f la solution vérifiant $f(0) = 1$, on a :

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &\iff \lambda e^{-3x} + \frac{7}{3} = 1 \\ &\iff \lambda e^{0} + \frac{7}{3} = 1 \\ &\iff \lambda = 1 - \frac{7}{3} \\ &\iff \lambda = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

f est donc la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\boxed{f(x) = -\frac{4}{3}e^{-3x} + \frac{7}{3}}$$

2. **Réponse C**
L'intégrale I est égale à l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f est les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$. Cette aire est comprise entre l'aire du domaine hachuré et celle du domaine grisée sur la figure ci-dessous.



On a donc l'encadrement :

$$\boxed{5 \leqslant I \leqslant 10}$$

3. **Réponse B**
On a :

$$\begin{aligned} \int_0^2 g'(x)\,dx &= \Big[g(x)\Big]_0^2 \\ &= \Big[x^2 \ln(x^2+4)\Big]_0^2 \\ &= 4\ln(8) \\ &\approx 8{,}3 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^2 g'(x)\,dx \approx 8{,}3}$$

4. **Réponse D**
Dans cette situation, on choisit 5 élèves parmi 31 sans répétition et sans tenir compte de l'ordre. Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 31, soit :

$$\boxed{\binom{31}{5}}$$

5. **Réponse A**
Le nombre de possibilités pour le choix des 3 élèves ayant choisi la spécialité SES est $\binom{20}{5}$ et le nombre de possibilités pour les 2 autres élèves est $\binom{11}{2}$. Le nombre total de groupes possibles est donc :

$$\boxed{\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}}$$

Commentaires

- Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée. Je me suis permis ici de justifier les réponses car cela n'aurait pas eu un très grand intérêt pédagogique de donner uniquement les cinq lettres correspondant aux bonnes réponses.

Exercice 3

Énoncé

On considère la suite (u_n), définie par :

$$u_0 = 8 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right)$$

1.(a) Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2.

(b) On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```
def mystere(k):
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k):
        S = S + u
        u = u - log(u / 4)
    return S
```

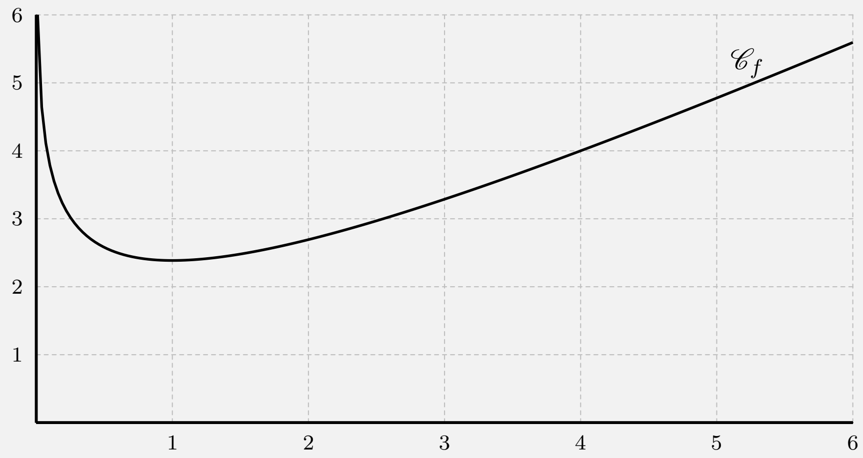
L'exécution de `mystere(10)` renvoie `58.44045206721732`. Que représente ce résultat ?

(c) Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6 :



Étudier les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3.(a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

(b) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.
On note ℓ la valeur de cette limite.

(c) Résoudre l'équation $f(x) = x$.

(d) En déduire la valeur de ℓ.

Correction

1.(a) On a :

- $u_1 = 8 - \ln\left(\dfrac{8}{4}\right) = 8 - \ln(2) \approx 7{,}31$
- $u_2 = 8 - \ln(2) - \ln\left(\dfrac{8 - \ln(2)}{4}\right) \approx 6{,}70$

Soit :

$$\boxed{u_1 \approx 7{,}31} \quad \text{et} \quad \boxed{u_2 \approx 6{,}70}$$

(b) La fonction `mystere` renvoie la somme des k premiers termes de la suite (u_n). Cela signifie donc que :

$$\boxed{u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9 \approx 58.44045206721732}$$

(c) Afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n), on peut modifier la fonction de la façon suivante :

```python
def mystere(k) :
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k) :
        S = S + u
        u = u - log(u / 4)
    return S / k
```

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{x}{4}} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{4}{x} \\ &= 1 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	$1+2\ln(2)$	$\nearrow$	

3.(a) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation :**
  On a $u_0 = 8$ et $u_1 = 8 - \ln(2) \approx 7{,}31$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

  $$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

  On a alors, en appliquant la fonction f, qui est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$:

  $$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$$

  Soit :

  $$1 + 2\ln(2) \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

  Et donc a fortiori, comme $1 + 2\ln(2) \geqslant 1$:

  $$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$\boxed{1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$$

(b) D'après la question précédente, la suite (u_n) est :

- décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)
- minorée par 1 (car $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers une limite réelle } \ell}$$

(c) Pour tout $x \in \,]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x - \ln\left(\frac{x}{4}\right) = x \\ &\iff \ln\left(\frac{x}{4}\right) = 0 \\ &\iff \frac{x}{4} = 1 \\ &\iff x = 4 \end{aligned}$$

L'équation $f(x) = x$ admet donc pour unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

$$\boxed{x = 4}$$

(d) La suite (u_n) est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur $]0\,;\,+\infty[$. Cette suite étant convergente, sa limite est nécessairement un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$. Or cette équation admet 4 pour unique solution, d'où :

$$\boxed{\ell = 4}$$

Commentaires

- Dans la question 1a, pour le calcul de u_2, il faut utiliser la valeur exacte de u_1 et pas sa valeur arrondie car cela pourrait entraîner des erreurs. On aurait également pu utiliser directement le mode « suite » de la calculatrice .
- Dans la question 1b, on peut utiliser le symbole Σ pour écrire la somme. Cela se note de la façon suivante :

$$\sum_{i=0}^{9} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9$$

- Détaillons le calcul du minimum de la fonction f dans le tableau de variations de la question 2 :

$$f(1) = 1 - \ln\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \ln(4) = 1 + \ln\left(2^2\right) = 1 + 2\ln(2)$$

Exercice 4

Énoncé

Une commune décide de remplacer le traditionnel feu d'artifice du 14 juillet par un spectacle de drones lumineux.
Pour le pilotage des drones, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$ dont l'unité est la centaine de mètres.
La position de chaque drone est modélisée par un point et chaque drone est envoyé d'un point de départ D de coordonnées $(2\,;\,5\,;\,1)$.
On souhaite former avec des drones des figures en les positionnant dans un même plan $\mathscr{P}$.
Trois drones sont positionnés aux points $A(-1\,;\,-1\,;\,17)$, $B(4\,;\,-2\,;\,4)$ et $C(1\,;\,-3\,;\,7)$.

1. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Dans la suite, on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC) et on considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) Justifier que $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.
   (b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2x - 3y + z - 18 = 0$.
3. Le pilote des drones décide d'envoyer un quatrième drone en prenant comme trajectoire la

droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d \ : \ \begin{cases} x = 3t+2 \\ y = t+5 \\ z = 4t+1 \end{cases} \quad , \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

(a) Déterminer un vecteur directeur de la droite d.

(b) Afin que ce nouveau drone soit également placé dans le plan $\mathscr{P}$, déterminer par le calcul les coordonnées du point E, intersection de la droite d avec le plan $\mathscr{P}$.

4. Le pilote des drones décide d'envoyer un cinquième drone le long de la droite Δ qui passe par le point D et qui est perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$. Ce cinquième drone est placé lui aussi dans le plan $\mathscr{P}$, soit à l'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$. On admet que le point $F(6\,;\,-1\,;\,3)$ correspond à cet emplacement.
Démontrer que la distance entre le point de départ D et le plan $\mathscr{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

5. L'organisatrice du spectacle demande au pilote d'envoyer un nouveau drone dans le plan $\mathscr{P}$ (peu importe sa position dans le plan), toujours à partir du point D. Sachant qu'il reste 40 secondes avant le début du spectacle et que le drone vole en trajectoire rectiligne à 18,6 m.s^{-1}, le nouveau drone peut-il arriver à temps ?

Correction

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\\-13\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-2\\-10\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles), on en déduit que :

$$\boxed{\text{Les points } A,\ B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$$

2.(a) On a :
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times 5 - 3\times(-1) + 1\times(-13) = 10+3-13 = 0$
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times 2 - 3\times(-2) + 1\times(-10) = 4+6-10 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est normal au plan } \mathscr{P}}$$

(b) Le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Il a donc une équation de la forme :

$$2x-3y+z+d=0 \quad \text{avec } d\in\mathbb{R}$$

De plus, le point $A(-1\,;\,-1\,;\,17)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation. On en déduit $2\times(-1)-3\times(-1)+17+d=0$, soit $-2+3+17+d=0$ et donc $d=-18$. Le plan $\mathscr{P}$ admet donc pour équation cartésienne :

$$\boxed{2x-3y+z-18=0}$$

3.(a) On lit directement sur sa représentation paramétrique que la droite d admet pour vecteur directeur le vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}}$$

(b) On injecte les expressions de la représentation paramétrique de d dans l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned} 2(3t+2)-3(t+5)+(4t+1)-18=0 &\Longleftrightarrow 6t+4-3t-15+4t+1-18=0 \\ &\Longleftrightarrow 7t=28 \\ &\Longleftrightarrow t=4 \end{aligned}$$

Le point E est donc le point de paramètre $t=4$ dans la représentation paramétrique de la droite d, soit :

$$\boxed{E(14\,;\,9\,;\,17)}$$

4. La distance entre le point D et le plan $\mathscr{P}$ est la distance entre D et son projeté orthogonal sur le plan $\mathscr{P}$. Il s'agit donc de calculer la longueur DF :

$$\begin{aligned} DF &= \sqrt{(6-2)^2+(-1-5)^2+(3-1)^2} \\ &= \sqrt{4^2+(-6)^2+2^2} \\ &= \sqrt{16+36+4} \\ &= \sqrt{56} \\ &= \sqrt{4\times 14} \\ &= 2\sqrt{14} \end{aligned}$$

La distance entre le point de départ D et le plan $\mathscr{P}$ est donc, en centaines de mètres :

$$\boxed{DF=2\sqrt{14}}$$

5. La distance la plus courte pour aller du point D au plan $\mathscr{P}$ est la distance DF qui est égale à $2\sqrt{14}$ centaines de mètres. Calculons alors le temps t, en secondes, nécessaire pour parcourir cette distance :

$$t=\frac{2\sqrt{14}\times 100}{18{,}6}\approx 40{,}23$$

Cela se jouera donc à 2 dixièmes de secondes mais :

$$\boxed{\text{Le nouveau drone n'arrivera pas à temps}}$$

Commentaires

- La distance la plus courte entre un point M et un plan $\mathscr{P}$ est la distance entre le point M et son projeté orthogonalsur le plan $\mathscr{P}$. Cette distance est appelée la distance du point M au plan $\mathscr{P}$. Cela signifie que pour se déplacer d'un point à un plan, la façon la plus rapide est d'y aller de façon orthogonale.