ANNÉE 2024 - SUJET CORRIGÉ 9

POLYNÉSIE - 19 JUIN 2024

Exercice 1

Énoncé

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.
Les quatre affirmations se placent dans la situation suivante :
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,,\,\overrightarrow{k})$, on considère les points :

$$A(2\,;\,1\,;\,-1),\quad B(-1\,;\,2\,;\,1)\quad \text{et}\quad C(5\,;\,0\,;\,-3).$$

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x+5y-2z+3=0.$$

On note $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-t+3 \\ y=t+2 \\ z=2t+1 \end{cases}\quad , t\in\mathbb{R}.$$

Affirmation 1 :
Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAC).

Affirmation 2 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont sécantes au point C.

Affirmation 3 :
La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 :
Le plan médiateur du segment $[BC]$, noté Q, a pour équation cartésienne :

$$3x-y-2z-7=0$$

On rappelle que le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Correction
Affirmation 1 : Faux
On a $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}5\\0\\-3\end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{OC} = 1\times 5 + 0\times 0 + 2\times(-3) = 5-6 = -1 \neq 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ n'est donc pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OC}$, il ne peut donc pas être normal au plan (OAC).

Affirmation 2 : Vrai
On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. On en déduit que les points A, B et C sont alignés et donc que le point C appartient à la droite (AB). D'autre part, on peut remarquer que le point C appartient à la droite $\mathscr{D}$. En effet, c'est le point de paramètre $t=-2$. Le point C appartient donc à la fois aux droites $\mathscr{D}$ et (AB) et comme ces deux droites ne sont pas confondues, elle sont sécantes au point C.

Affirmation 3 : Vrai
D'après son équation cartésienne, le plan $\mathscr{P}$ admet le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et, d'après sa représentation paramétrique, la droite $\mathscr{D}$ admet le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. On a alors :

$$\overrightarrow{n'}.\overrightarrow{u} = 1\times(-1) + 5\times 1 + (-2)\times 2 = -1+5-4 = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{n'}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux donc la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 : Vrai
Le plan (Q) admet le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}$ pour vecteur normal, donc également n'importe quel vecteur qui lui est colinéaire, par exemple le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Il admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$3x - y - 2z + d = 0 \quad \text{avec } d\in\mathbb{R}$$

Soit I le milieu de $[BC]$, on a $I\left(\dfrac{-1+5}{2}\,;\,\dfrac{2+0}{2}\,;\,\dfrac{1+(-3)}{2}\right)$ soit $I\,(2\,;\,1\,;\,-1)$. Le point I appartient au plan (Q) donc ses coordonnées vérifient l'équation, soit $3\times 2 - 1 - 2\times(-1) + d = 0$ puis $6-1+2+d=0$ et donc $d=-7$. Le plan (Q) admet donc pour équation :

$$3x - y - 2z - 7 = 0$$

Commentaires

- Pour l'affirmation 1, on peut se rendre compte que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OA}$ mais cela ne suffit pas pour être orthogonal au plan (OAC). En effet, pour montrer qu'un vecteur et orthogonal à un plan, il faut montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan (et dans ce cas, il est alors orthogonal à tous les vecteur du plan).
- Pour l'affirmation 2, si l'on souhaite justifier que les droites $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont pas confondues, il suffit de dire qu'elle ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

Exercice 2

Énoncé

Une entreprise fabrique des objets en plastique en injectant dans un moule de la matière fondue à 210°C. On cherche à modéliser le refroidissement du matériau à l'aide d'une fonction f donnant la température du matériau injecté en fonction du temps t.
Le temps est exprimé en seconde et la température est exprimée en degré Celsius.
On admet que la fonction f cherchée est solution d'une équation différentielle de la forme suivante où m est une constante réelle que l'on cherche à déterminer :

$$(E) \quad : \quad y' + 0{,}02y = m$$

Partie A

1. Justifier l'affichage suivant d'un logiciel de calcul formel :

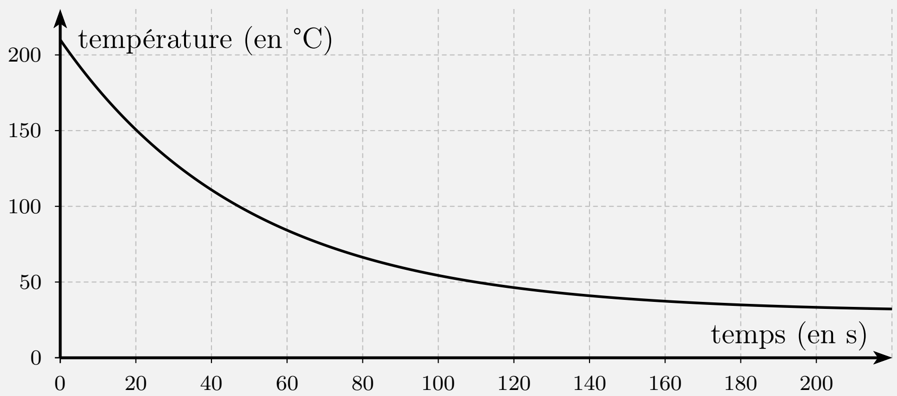
Entrée :	RésoudreEquationDifférentielle $(y' + 0{,}02y = m)$
Sortie :	$\boxed{\rightarrow}$ $y = k * \exp(-0.02 * t) + 50 * m$

2. La température de l'atelier est de 30°C. On admet que la température $f(t)$ tend vers 30°C lorsque t tend vers l'infini.
Démontrer que $m = 0{,}6$.
3. Déterminer l'expression de la fonction f cherchée en tenant compte de la condition initiale $f(0) = 210$.

Partie B

On admet ici que la température (exprimée en degré Celsius) du matériau injecté en fonction du temps (exprimé en seconde) est donnée par la fonction dont l'expression et une représentation graphique sont données ci-dessous :

$$f(t) = 180\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30.$$



1. L'objet peut être démoulé lorsque sa température devient inférieure à 50°C.
   (a) Par lecture graphique, donner une valeur approchée du nombre T de secondes à attendre avant de démouler l'objet.
   (b) Déterminer par le calcul la valeur exacte de ce temps T.
2. À l'aide d'une intégrale, calculer la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes.

Correction
Partie A

1. L'équation différentielle $y' + 0{,}02y = m$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}02$ et $b = m$. On a alors $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{m}{0{,}02} = 50m$, les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme :
$$\boxed{t \mapsto k\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 50m} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$
D'où l'affichage obtenu.
2. On a $f(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 50m$. Or $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}02t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 50m$. D'après l'énoncé, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 30$, d'où $50m = 30$ soit :
$$\boxed{m = \frac{30}{50} = 0{,}6}$$
3. D'après la question précédente, la fonction f est de la forme :
$$f(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30$$
On a alors :
$$\begin{aligned} f(0) = 210 &\iff k\mathrm{e}^{0} + 30 = 210 \\ &\iff k + 30 = 210 \\ &\iff k = 180 \end{aligned}$$
On a donc, pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$:
$$\boxed{f(t) = 180\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30}$$

Partie B

1.(a) On lit graphiquement que la température passe en-dessous de 50°au bout d'environ 110 secondes. Le temps à attendre avant de démouler l'objet est donc d'environ :
$$\boxed{\text{1 minute et 50 secondes}}$$

(b) Il s'agit de résoudre l'équation $f(t) = 50$:
$$\begin{aligned} f(t) = 50 &\iff 180\mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30 = 50 \\ &\iff 180\mathrm{e}^{-0{,}02t} = 20 \\ &\iff \mathrm{e}^{-0{,}02t} = \frac{1}{9} \\ &\iff -0{,}02t = \ln\left(\frac{1}{9}\right) \\ &\iff -0{,}02t = -\ln(9) \\ &\iff t = \frac{-\ln(9)}{-0{,}02} \\ &\iff t = 50\ln(9) \end{aligned}$$
Soit :
$$\boxed{T = 100\ln(3)}$$

2. Il s'agit de calculer la valeur moyenne m de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,100]$:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{100}\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{100}\int_0^{100} 180\mathrm{e}^{-0{,}02t}+30\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{100}\left[\frac{180}{-0{,}02}\mathrm{e}^{-0{,}02t}+30t\right]_0^{100}\\
&= \frac{1}{100}\Big[-9\,000\mathrm{e}^{-0{,}02t}+30t\Big]_0^{100}\\
&= \frac{1}{100}\left(-9\,000\mathrm{e}^{-0{,}02\times 100}+30\times 100+9\,000\mathrm{e}^{-0{,}02\times 0}+30\times 0\right)\\
&= \frac{1}{100}\left(-9\,000\mathrm{e}^{-2}+3\,000+9\,000\right)\\
&= \frac{1}{100}\left(-9\,000\mathrm{e}^{-2}+12\,000\right)\\
&= 120-90\mathrm{e}^{-2}
\end{aligned}$$

La valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes est donc (en °C) :

$$\boxed{m = 120-90\mathrm{e}^{-2}\approx 108}$$

Commentaires

- Dans la question 1b, détaillons la simplification :

$$T=\frac{-\ln(9)}{-0{,}02}=\frac{\ln(9)}{0{,}02}=\frac{\ln(3^2)}{\frac{1}{50}}=50\times 2\ln(3)=100\ln(3)$$

Exercice 3

Énoncé

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$				

Partie B

Voici les règles d'un jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais.

- On lance trois pièces équilibrées :
  - Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée ;
  - Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

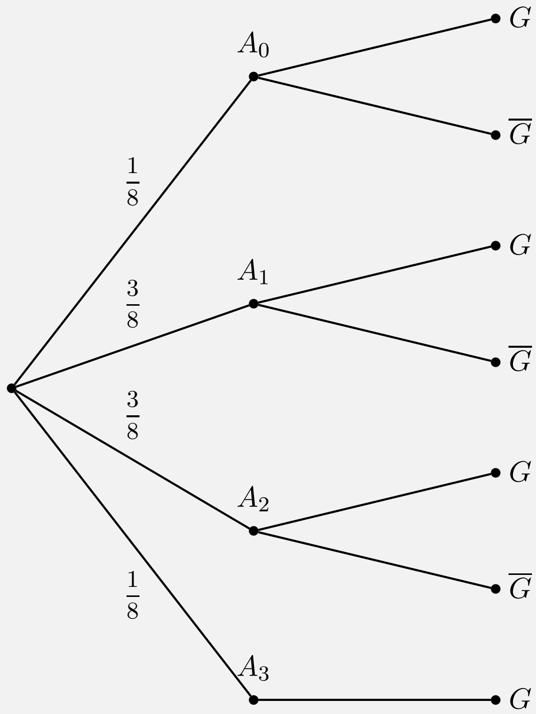
On considère les évènements suivants :

- G : « la partie est gagnée ».

Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les évènements :

- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. Démontrer que $P_{A_1}(G) = \dfrac{1}{4}$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Démontrer que la probabilité p de gagner à ce jeu est $p = \dfrac{27}{64}$.
4. La partie a été gagnée. Quelle est la probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative ?
5. Combien de fois faut-il jouer à ce jeu pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95 ?

Correction
Partie A

1. On répète 3 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès (obtenir « Face ») est égale à 0,5. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 3 \text{ et } p = 0{,}5}$$

2. La loi de X est donnée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,125	0,375	0,375	0,125

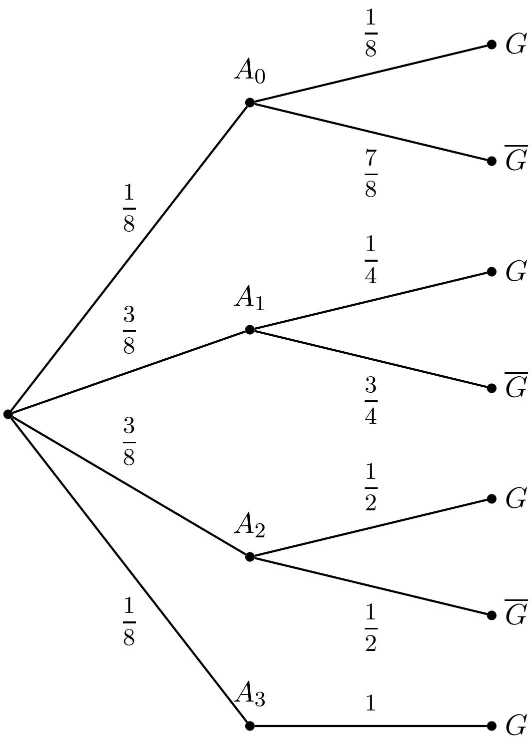
Partie B

1. Il s'agit de la probabilité de gagner la partie sachant qu'une pièce est tombée du côté « Face » au premier lancer. Pour cela, il faut obtenir « Face » avec les deux autres pièces, la probabilité est alors

égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. On a donc :

$$\boxed{P_{A_1}(G) = \frac{1}{4}}$$

2. On a l'arbre :



3. Il s'agit de calculer $P(G)$. Les événements A_0, A_1, A_2 et A_3 forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(A_0) \times P_{A_0}(G) + P(A_1) \times P_{A_1}(G) + P(A_2) \times P_{A_2}(G) + P(A_3) \times P_{A_3}(G) \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \times 1 \\ &= \frac{1}{64} + \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{12}{64} + \frac{8}{64} \\ &= \frac{27}{64} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{p = \frac{27}{64}}$$

4. Il s'agit de calculer $P_G(A_1)$:

$$\begin{aligned} P_G(A_1) &= \frac{P(A_1 \cap G)}{P(G)} \\ &= \frac{\frac{3}{8} \times \frac{1}{4}}{\frac{27}{64}} \\ &= \frac{3}{32} \times \frac{64}{27} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

La probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative sachant que la partie est gagnée est donc :

$$\boxed{P_G(A_1) = \frac{2}{9}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et Y la variable aléatoire qui compte le nombre de parties gagnées sur n parties jouées. Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{27}{64}$. La probabilité de gagner au moins une partie est :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}95 &\iff 1 - \left(\frac{37}{64}\right)^n \geqslant 0{,}95 \\
&\iff \left(\frac{37}{64}\right)^n \leqslant 0{,}05 \\
&\iff \ln\left(\left(\frac{37}{64}\right)^n\right) \leqslant \ln(0{,}05) \\
&\iff n\ln\left(\frac{37}{64}\right) \leqslant \ln(0{,}05) \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \quad \left(\textit{car } \ln\left(\frac{37}{64}\right) < 0\right)
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln\left(\frac{37}{64}\right)} \approx 5{,}47$ donc le nombre de parties qu'il faut jouer à ce jeu pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95 est :

$$\boxed{n = 6}$$

Commentaires

- Dans la question 2, les probabilités peuvent être obtenues directement à l'aide de la calculatrice. On peut également utiliser les formules, on a par exemple :

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} 0{,}5^2 \times 0{,}5^1 = 3 \times 0{,}5^3 = 0{,}375$$

Exercice 4

Énoncé

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.
Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n) :
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie 1.3333333333333333.
   Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.
3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
>> suite(2)
1.3333333333333333
>> suite(5)
1.0058479532163742
>> suite(10)
1.0000057220349845
>> suite(20)
1.000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5-x}$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4.$$

3.(a) Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.
   Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0$$

(b) Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente
   Déterminer sa limite.
5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?

Correction
Partie A

1. On complète le script de la façon suivante :

```
def suite(n) :
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 4 / (5 - u)
```

```
    return u
```

2. La commande `suite(2)` renvoie la valeur de u_2. Or, on a :
   - $u_1 = \dfrac{4}{5-3} = \dfrac{4}{2} = 2$
   - $u_2 = \dfrac{4}{5-2} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}3333$

   Cela explique l'affichage.
3. Les affichages nous donnent les valeurs suivantes :
   - $u_2 \approx 1{,}3333333333333333$
   - $u_5 \approx 1{,}0058479532163742$
   - $u_{10} \approx 1{,}0000057220349845$
   - $u_{20} \approx 1{,}000000000005457$

   On peut donc conjecturer que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante et converge vers } 1}$$

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,; 5[$ et, pour tout $x \in\,]-\infty\,; 5[$:

$$f'(x) = -\frac{-4}{(5-x)^2} = \frac{4}{(5-x)^2}$$

   Pour tout $x \in\,]-\infty\,; 5[$, on a $f'(x) \geqslant 0$ donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est croissante sur l'intervalle }]-\infty\,; 5[}$$

2. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$.
   - **Initialisation :**
     On a $u_0 = 3$ et $u_1 = 2$ donc $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 4$. On en déduit que la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4$$

     On a alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,; 5[$:

$$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(4)$$

     Soit :

$$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

     Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
   - **Conclusion :**
     La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
     On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 4}$$

3.(a) Pour tout $x \in]-\infty\,;\,5[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{4}{5-x} = x \\ &\iff 4 = x(5-x) \\ &\iff 4 = 5x - x^2 \\ &\iff x^2 - 5x + 4 = 0 \end{aligned}$$

D'où l'équivalence :

$$\boxed{f(x) = x \iff x^2 - 5x + 4 = 0}$$

(b) L'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$ est une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 > 0$. Elle admet donc deux solutions réels :

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{9}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{9}}{2} = 4$$

L'équation $f(x) = x$ admet donc pour ensemble solution sur l'intervalle $]-\infty\,;\,5[$:

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1\,;\,4\}}$$

4. D'après la question 2 de la partie B, la suite (u_n) est :
   - décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)
   - minorée par 1 (car $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

   On en déduit que la suite (u_n) converge vers une limite l. Et comme la suite est définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et que la fonction f est continue sur $]-\infty\,;\,5[$, on sait que l vérifie $f(l) = l$. Or cette équation admet deux solutions, qui sont 1 et 4. Mais comme la suite (u_n) est décroissante et que $u_0 = 3$, la suite ne peut pas converger vers 4, d'où :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$$

5. Le comportement de la suite serait différent en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$. En effet, 4 étant un point fixe pour la fonction f, dans ce cas la suite (u_n) serait constante égale à 4. Autrement dit :

$$\boxed{u_n = 4 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

Commentaires

- Dans la question 1 de la partie B, pour le calcul de la dérivée de la fonction f, on utilise la formule :

$$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$$

  avec $u(x) = 5 - x$. Il reste ensuite à multiplier par la constante 4.