ANNÉE 2024 - SUJET CORRIGÉ 8

MÉTROPOLE - 20 JUIN 2024

Exercice 1

Énoncé (5 points)

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

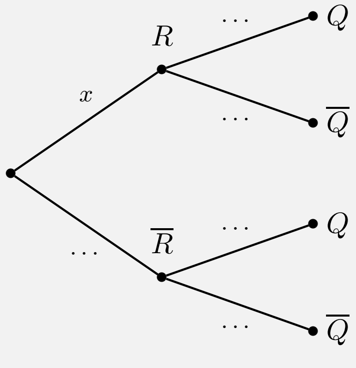
On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

On note R l'événement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'événement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

Pour un événement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son événement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\overline{R}}(\overline{Q})$.
2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.
   (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
   (b) Montrer que $x = 0{,}9$.
3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?



4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres $(20\,;\,0{,}615)$. La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
   À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?
5. On interroge au hasard dix étudiants.
   Les variables aléatoires N_1, N_2, …, N_{10} modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par

chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).
Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.
Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.

6. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.
   (a) Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
   (b) Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}47355$.
   (c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.

   « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

Correction

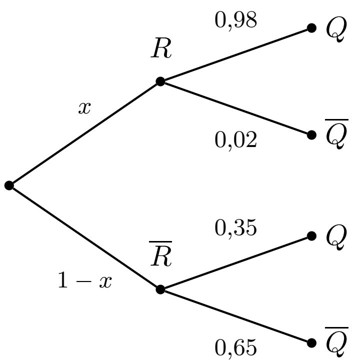
1. On sait que :
   - 91,7 % des étudiants ont répondu « oui » donc :

$$\boxed{P(Q) = 0{,}917}$$

   - 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » donc :

$$\boxed{P_{\overline{R}}(\overline{Q}) = 0{,}65}$$

2.(a) On complète l'arbre de la façon suivante :



(b) Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(Q) &= P(R) \times P_R(Q) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(Q)\\
&= x \times 0{,}98 + (1-x) \times 0{,}35\\
&= 0{,}98x + 0{,}35 - 0{,}35x\\
&= 0{,}63x + 0{,}35
\end{aligned}$$

Or, d'après l'énoncé, on sait que $P(Q) = 0{,}917$, il s'agit alors de résoudre une équation :

$$\begin{aligned}
0{,}63x + 0{,}35 = 0{,}917 &\iff 0{,}63x = 0{,}917 - 0{,}35\\
&\iff 0{,}63x = 0{,}567\\
&\iff x = \frac{0{,}567}{0{,}63}\\
&\iff x = 0{,}9
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{x = 0{,}9}$$

3. Il s'agit de calculer $P_Q(R)$:

$$\begin{aligned} P_Q(R) &= \frac{P(R \cap Q)}{P(Q)} \\ &= \frac{P(R) \times P_R(Q)}{P(Q)} \\ &= \frac{0{,}9 \times 0{,}98}{0{,}917} \\ &\approx 0{,}962 \end{aligned}$$

Sachant que l'étudiant a répondu « oui » à la question, la probabilité qu'il ait réussi l'examen est donc :

$$\boxed{P_Q(R) \approx 0{,}962}$$

4. Il s'agit de déterminer un entier k tel que $P(N \geqslant k) \approx 0{,}65$. On obtient, à l'aide de la calculatrice :

$$\boxed{P(N \geqslant 12) \approx 0{,}65}$$

Afin qu'environ 65 % des étudiants soient récompensés, elle doit attribuer les récompenses à partir de la note de 12.

5. La variable aléatoire N suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}615$. Son espérance est donc $E(N) = n \times p = 20 \times 0{,}615 = 12{,}3$ et sa variance $V(N) = n \times p \times (1-p) = 20 \times 0{,}615 \times 0{,}385 = 4{,}7355$.
Les variables aléatoires N_1, N_2, …, N_{10} suivent toutes la même loi que N, on a donc :

$$E(S) = 10 \times E(N) = 10 \times 12{,}3 = 123$$

Et comme les variables aléatoires N_1, N_2, …, N_{10} sont indépendantes, on a :

$$V(S) = 10 \times V(N) = 4{,}7355 \times 10 = 47{,}355$$

Soit :

$$\boxed{E(S) = 123} \quad \text{et} \quad \boxed{V(S) = 47{,}355}$$

6. (a) La variable aléatoire M modélise :

$$\boxed{\text{La moyenne du groupe des dix étudiants}}$$

(b) On sait alors, d'après le cours, que $E(M) = E(N)$ et que $V(M) = \dfrac{1}{10} \times V(N)$, soit :

$$\boxed{E(M) = 12{,}3} \quad \text{et} \quad \boxed{V(M) = 0{,}47355}$$

(c) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\left(|M - E(M)| \geqslant 2\right) \leqslant \frac{V(M)}{2^2}$$

Soit :

$$P\left(|M - 12{,}3| \geqslant 2\right) \leqslant \frac{0{,}47355}{4}$$

Et par passage à l'événement contraire :

$$P\left(|M - 12{,}3| < 2\right) \leqslant 1 - \frac{0{,}47355}{4}$$

Soit :

$$P\left(12{,}3 - 2 < M < 12{,}3 + 2\right) \geqslant 0{,}8816125$$

Et donc :

$$\boxed{P\left(10{,}3 < M < 14{,}3\right) \geqslant 0{,}8816125}$$

La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est donc supérieure à 0,8.

Commentaires

- Selon moi, l'énoncé de la question 4 est ambigu. Si l'on souhaite qu'au moins 65 % des étudiants soient récompensés, il faut attribuer les récompenses à partir de la note de 11. En effet, on a :
  - $P(N \geqslant 12) \approx 0{,}649 < 0{,}65$
  - $P(N \geqslant 11) \approx 0{,}797 > 0{,}65$

  Mais comme $P(N \geqslant 12)$ est vraiment proche de 0,65, je pense que c'est cette réponse qui était attendue.
- Dans la question 6c, on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\boxed{P\left(|X-\mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{\delta^2}}$$

avec $\mu = 12{,}3$, $V = 0{,}47355$ et $\delta = 2$.

Exercice 2

Énoncé

Les parties A et B sont indépendantes.

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1 m^3 = 1 000 L.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg.L^{-1}, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg.L^{-1}.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 mg.L^{-1}. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de 0,70 mg.L^{-1}.

Partie A : étude d'un modèle discret.
Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 mg.L^{-1}.
2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore en mg.L^{-1}, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0{,}7$.
   On admet que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}92v_n + 0{,}3$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-contre écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```python
def alerte_chlore(s) :
  n=0
  v=0.7
  while ... :
    n= ...
    v= ...
  return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu.
Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en mg.L^{-1}, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0{,}08y + \dfrac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-0{,}08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

2. (a) Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.
   (b) On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à 0,7 mg.L^{-1}.
   On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg.L^{-1}. Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

Correction
Partie A

1. Alain ajoute 15 g, soit 15 000 mg et la piscine contient 50 m^3 soit 50 000 L. On a alors :

$$\frac{15\,000}{50\,000} = 0{,}3$$

L'ajout de 15 g pour 50 m^3 fait donc bien augmenter le taux de 0,3 mg.L^{-1}.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $v_0 = 0{,}7$ et $v_1 = 0{,}944$. On a donc $v_0 \leqslant v_1 \leqslant 4$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$$

  On a alors, en multipliant par 0,92 qui est positif :

$$0{,}92v_n \leqslant 0{,}92v_{n+1} \leqslant 3{,}68$$

  Puis, en ajoutant 0,3 :

$$0{,}92v_n + 0{,}3 \leqslant 0{,}92v_{n+1} + 0{,}3 \leqslant 3{,}98$$

  Soit :

$$v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 3{,}98$$

  Et donc a fortiori :

$$v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 4$$

  La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion :**
  La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  On a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4}$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
→ $v_n \leqslant v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est croissante.
→ $v_n \leqslant 4$ donc la suite (v_n) est majorée par 4.
La suite (v_n) est croissante et majorée donc elle converge vers une limite l inférieure ou égale à 4.
De plus, on sait qu'alors (v_n) converge vers un point fixe, c'est-à-dire un réel l qui vérifie $0{,}92l + 0{,}3 = l$. Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} 0{,}92l + 0{,}3 = l &\iff 0{,}08l = 0{,}3 \\ &\iff l = \frac{0{,}3}{0{,}08} \\ &\iff l = 3{,}75 \end{aligned}$$

La suite (v_n) converge donc vers :

$$\boxed{l = 3{,}75}$$

3. À long terme, le taux de chlore ne sera pas conforme à la préconisation des piscinistes car il va se rapprocher de 3,75 mg.L^{-1} et dépassera donc 3 mg.L^{-1}.
4. On complète l'algorithme de la façon suivante :

```
def alerte_chlore(s) :
  n = 0
  v = 0.7
  while v <= s :
    n = n+1
    v = 0,92*v + 0.3
  return n
```

5. En exécutant l'instruction `alerte_chlore(3)` on obtient la valeur :

$$\boxed{17}$$

Cela signifie que la taux de chlore dépassera 3 mg.L^{-1} après 17 jours de traitement.

Partie B

1. Résolvons l'équation différentielle $y' = -0{,}08y + \dfrac{q}{50}$.
   - L'équation homogène associée $y' = -0{,}08y$ admet pour solutions les fonctions de la forme :
   $$x \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}08x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$
   - On a $\dfrac{\frac{q}{50}}{0{,}08} = \dfrac{q}{50 \times 0{,}08} = \dfrac{q}{4}$ donc l'équation $y' = -0{,}08y + \dfrac{q}{50}$ admet pour solution particulière constante la fonction :
   $$x \mapsto \frac{q}{4}$$
   - Les solutions de l'équation différentielle $y' = -0{,}08y + \dfrac{q}{50}$ sont donc les fonctions de la forme :
   $$\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

2.(a) On a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{q}{4}} \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}08x} = 0$$

(b) Il s'agit de déterminer les valeurs de C et q telles que $f(0) = 0{,}7$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$:

$$\begin{cases} f(0) = 0{,}7 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} C + \dfrac{q}{4} = 0{,}7 \\ \dfrac{q}{4} = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C = 0{,}7 - \dfrac{q}{4} \\ q = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} C = -1{,}3 \\ q = 8 \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{\begin{cases} C = -1{,}3 \\ q = 8 \end{cases}}$$

On a alors :

$$\boxed{f(x) = -1{,}3\mathrm{e}^{-0{,}08x} + 2}$$

Commentaires

- Dans la question 2b de la partie A, le fait que la suite soit croissante et majorée par 4 permet de conclure que la suite converge mais ne permet pas de déterminer la valeur de la limite (ce n'est pas nécessairement 4). On montre d'ailleurs ici que la limite est 3,75.
- Dans la question 5 de la partie A, on peut également justifier en utilisant les valeurs des termes de la suite obtenue à l'aide de la calculatrice. Il suffit alors de dire que :

  → $v_{16} \approx 2{,}95 < 3$

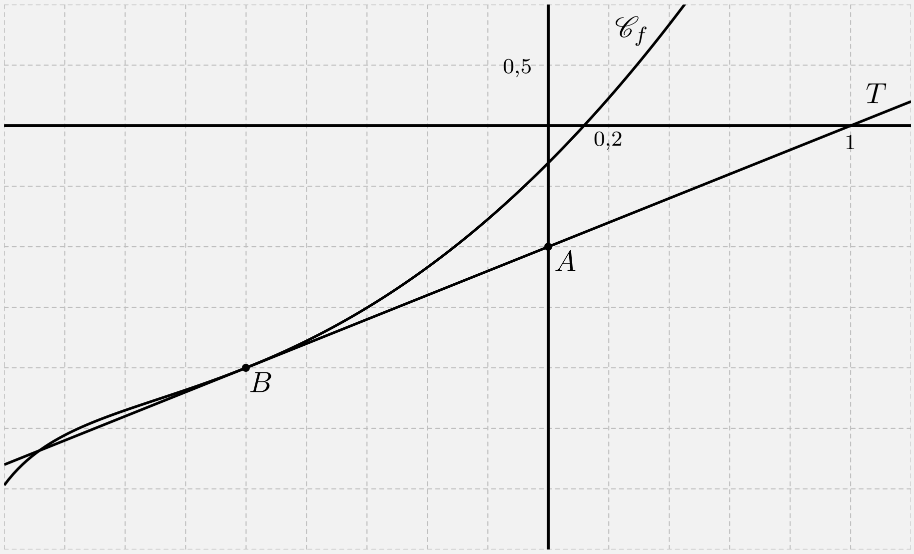
  → $v_{17} \approx 3{,}01 > 3$

  C'est donc à partir de $n = 17$ que v_n dépasse 3.

Exercice 3

Énoncé (6 points)

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point $A(0\,;\,-1)$.



Partie A : exploitation du graphique.
À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f.
On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.
   On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;\,+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.
6. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

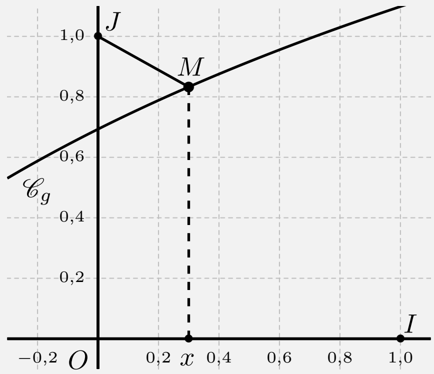
Soit g la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \ln(x+2)$.

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\,I\,,J)$, représenté ci-contre.

Soit M un point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $h(x) = JM^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.
2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée. On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$

   où f est la fonction étudiée en partie B.
   (a) Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;\,+\infty[$.
   Les limites ne sont pas demandées.
   (b) En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.
3. On notera M_α le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α.
   (a) Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.
   (b) En déduire que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires. On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendicualires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

Correction
Partie A

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $B(-1\,;\,-2)$ donc :

$$\boxed{f(-1) = -2}$$

   La tangente au point d'abscisse -1 passe par les points $B(-1\,;\,-2)$ et $A(0\,;\,-1)$. Son coefficient directeur est donc égal à :

$$\frac{-1-(-2)}{0-(-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

   Soit :

$$\boxed{f'(-1) = 1}$$

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ semble être concave puis convexe.
3. A priori, la courbe $\mathscr{C}_f$ ne coupe l'axe des abscisse qu'en un point. On peut donc conjecturer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution :

$$\boxed{x \approx 0{,}1}$$

Partie B

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 2x - 1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -2} \ln(x+2) = -\infty \end{cases}$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc :

$$\boxed{\text{Une asymptote verticale d'équation } x = -2}$$

2. La fonction f est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x > -2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2 + \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 2x + 4 + 1}{x+2} \\ &= \frac{2x^2 + 6x + 5}{x+2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}}$$

3. Le polynôme $2x^2 + 6x + 5$ admet pour discriminant $\Delta = -4$, il n'a donc aucune racine réelle et est strictement positif sur $\mathbb{R}$. De plus, $x + 2$ est strictement positif sur $]-2\,;\,+\infty[$ donc $f'(x) > 0$ sur $]-2\,;\,+\infty[$. On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-2\,;\,+\infty[}$$

On a donc le tableau :

x	-2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in]-\infty\,;\,+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$.
   On a :
   - $f(0{,}11) \approx -0{,}02 < 0$
   - $f(0{,}12) \approx 0{,}0058 > 0$

   Donc :

$$\boxed{0{,}11 < \alpha < 0{,}12}$$

5. f est strictement croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$ et s'annule en α. On a donc le tableau :

x	-2		α		$+\infty$
$f(x)$	||	$-$	0	$+$	

6. La fonction f' est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in]-2\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x+6)(x+2)-(2x^2+6x+5)\times 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{4x^2+8x+6x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Le polynôme $2x^2+8x+7$ admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{2}}{2} \approx -2{,}71 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4+\sqrt{2}}{2} \approx -1{,}29$$

Et il est positif à l'extérieur de l'intervalle des racines. Et comme $(x+2)^2$ est positif, on a le tableau :

x	-2		x_2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	concave		convexe	

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en x_2. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc un unique point d'inflexion au point d'abscisse :

$$\boxed{\frac{-4+\sqrt{2}}{2}}$$

Partie C

1. On a $J(0\,;\,1)$ et $M(x\,;\,\ln(x+2))$ donc, pour tout $x > -2$:

$$\begin{aligned} h(x) &= JM^2 \\ &= (x-0)^2 + (\ln(x+2)-1)^2 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{h(x) = x^2 + [\ln(x+2)-1]^2}$$

2.(a) Pour tout $x \in]-2\,;\,+\infty[$, $x+2>0$ donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$. On a donc le tableau :

x	-2		α		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

(b) La distance JM étant positive, elle est minimale lorsque son carré est minimal, c'est-à-dire lorsque la valeur de $h(x)$ est minimale. D'après le tableau de variations, h atteint son minimum en α. On en déduit que :

$$\boxed{JM \text{ est minimale pour } x = \alpha}$$

3.(a) On sait que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire que :

$$\alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha+2) = 0$$

Et donc que :

$$\boxed{\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2}$$

(b) • La fonction g est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ et pour tout $x \in\ ]-2\,;+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{1}{x+2}$. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α est donc :

$$g'(\alpha)=\frac{1}{\alpha+2}$$

• On a $J(0\,;1)$ et $M_\alpha(\alpha\,;g(\alpha))$, soit $M_\alpha(\alpha\,;\ln(\alpha+2))$ et donc, d'après la question précédente $M_\alpha(\alpha\,;1-2\alpha-\alpha^2)$. Calculons le coefficient directeur m_α de la droite (JM_α) :

$$\begin{aligned} m_\alpha &= \frac{y_{M_\alpha}-y_J}{x_{M_\alpha}-x_J}\\ &= \frac{1-2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha-0}\\ &= \frac{-2\alpha-\alpha^2}{\alpha}\\ &= \frac{\alpha(-2-\alpha)}{\alpha}\\ &= -2-\alpha\\ &= -(\alpha+2) \end{aligned}$$

• Calculons alors le produit des coefficients directeurs :

$$g'(\alpha)\times m_\alpha=\frac{1}{\alpha+2}\times(-(\alpha+2))=-1$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La tangente à } \mathscr{C}_g \text{ au point } M_\alpha \text{ et la droite } (JM_\alpha) \text{ sont perpendiculaires}}$$

Commentaires

- Pour le calcul de JM^2, on peut commencer par calculer la longueur JM à l'aide de la formule :

$$JM=\sqrt{(x_M-x_J)^2+(y_M-y_J)^2}$$

Et donc, en élevant au carré, la racine disparaît :

$$JM^2=(x_M-x_J)^2+(y_M-y_J)^2$$

Dans la correction, j'ai élevé directement au carré.

- Dans la question 6 de la partie B, on doit étudier le signe du polynôme $2x^2+8x+7$. Comme il y a deux racines x_1 et x_2 et que le coefficient de x^2 est positif, son signe est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$2x^2+8x+7$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et comme on travaille sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ et que $x_1<-2$, on obtient le tableau :

x	-2		x_2		$+\infty$
$2x^2+8x+7$		$-$	0	$+$	

Exercice 4

Énoncé (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$A(2\,;\,0\,;\,0)\ ,\ B(0\,;\,4\,;\ \ 3)\ ,\ C(4\,;\,4\,;\,1)\ ,\ D(0\,;\,0\,;\,4)\ \text{et}\ H(-1\,;\,1\,;\,2)$$

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$.

Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - y + 2z - 2 = 0$.
Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Correction
Affirmation 1 : Vrai
On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-2\\4-0\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0-2\\0-0\\4-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, C et D définissent un plan.

Soit alors $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}8\\-5\\4\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$. On a :

- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 8 \times 2 + (-5) \times 4 + 4 \times 1 = 16 - 20 + 4 = 0$
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AD} = 8 \times (-2) + (-5) \times 0 + 4 \times 4 = -16 + 0 + 16 = 0$

Le plan (ACD) admet donc une équation de la forme $8x-5y+4z+d = 0$. Et comme le point $A(2\,;\,0\,;\,0)$, par exemple, appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient l'équation donc $8\times 2-5\times 0+4\times 0+d = 0$ soit $d = -16$. Le plan (ACD) admet donc bien pour équation cartésienne $8x - 5y + 4z - 16 = 0$.

Affirmation 2 : Faux
Le plan (ABC) admet pour équation $8x-5y+4z-16 = 0$. Or les coordonnées du point B ne vérifient pas cette équation, en effet $8 \times 0 - 5 \times 4 + 4 \times 3 - 16 = -24 \neq 0$. Le point B n'appartient donc pas au plan (ACD). On en déduit que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Affirmation 3 : Vrai

La droite (AC) passe par $A(2\,;\,0\,;\,0)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur, elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

La droite (BH) passe par $B(0\,;\,4\,;\,3)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur, elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t' \\ y = 4 - 3t' \\ z = 3 - t' \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Déterminons l'intersection de (AC) et (BH) :

$$\begin{cases} 2 + 2t = -t' \\ 4t = 4 - 3t' \\ t = 3 - t' \end{cases} \iff \begin{cases} 2 + 2(3 - t') = -t' \\ 4(3 - t') = 4 - 3t' \\ t = 3 - t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2 + 6 - 2t' = -t' \\ 12 - 4t' = 4 - 3t' \\ t = 3 - t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t' = 8 \\ t' = 8 \\ t = -5 \end{cases}$$

Les droites (AC) et (BH) sont donc sécantes. Le point d'intersection est le point de paramètre $t = -5$ dans la représentation paramétrique de (AC) et de paramètre $t' = 8$ dans celle de (BH), c'est-à-dire le point de coordonnées :

$$\boxed{(-8\,;\,-20\,;\,-5)}$$

Affirmation 4 : Vrai

Le point H appartient au plan (ABC), en effet $-1 - 1 + 2 \times 2 - 2 = 0$. On a $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 0-1 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{HD}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. D'après son équation cartésienne, le plan (ABC) admet le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal, soit le vecteur $\overrightarrow{HD}$. Finalement, (HD) est perpendiculaire au plan (ABC) et H appartient au plan (ABC) donc H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

Commentaires

- Pour montrer que trois points A, C et D définissent un plan, il faut montrer que ces points ne sont pas alignés. Il suffit donc de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.
- Pour l'affirmation 1, on aurait pu vérifier simplement que les coordonnées des points A, C et D vérifient l'équation donnée. Cela ne prouve cependant pas que les points ne sont pas alignés.
- Pour montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires, on aurait également pu montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires. Pour cela, on peut montrer qu'il n'existe pas de réels α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ ou alors que pour tous réels α, β et γ :

$$\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0} \implies \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$