Métropole - 19 juin 2024

Spécialité mathématiques - Baccalauréat

Exercice 1

Exercice 1

1. **Affirmation 1 : Vrai**

Exercice 1

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = 5 \times \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$

Exercice 1

1. **Affirmation 1 : Vrai**

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$f(x) = 5 \times \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$

   Et, par croissances comparées,

Exercice 1

1. **Affirmation 1 : Vrai**

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$f(x) = 5 \times \frac{x}{e^x}$$

   Et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Exercice 1

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(x) = 5 \times \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$
   Et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Exercice 1

1. **Affirmation 1 : Vrai**

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$f(x) = 5 \times \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$

   Et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc :

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc la droite d'équation $y = 0$ (soit l'axe des abscisses)

Exercice 1

1. **Affirmation 1 : Vrai**

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$f(x) = 5 \times \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$

   Et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc :

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc la droite d'équation $y = 0$ (soit l'axe des abscisses) comme asymptote horizontale en $+\infty$.

Affirmation 2 : Vrai

Affirmation 2 : Vrai

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\mathbb{R}$:

Affirmation 2 : Vrai

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\mathbb{R}$:

$$f'(x) =$$

Affirmation 2 : Vrai

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 5\mathrm{e}^{-x} + 5x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

Affirmation 2 : Vrai

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\mathrm{e}^{-x} + 5x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (5 - 5x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Affirmation 2 : Vrai

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\mathrm{e}^{-x} + 5x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (5 - 5x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Et donc, pour tout $\mathbb{R}$:

Affirmation 2 : Vrai

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\mathrm{e}^{-x} + 5x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (5 - 5x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Et donc, pour tout $\mathbb{R}$:

$$f'(x) + f(x) =$$

Affirmation 2 : Vrai

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\mathrm{e}^{-x} + 5x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (5 - 5x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Et donc, pour tout $\mathbb{R}$:

$$f'(x) + f(x) = (5 - 5x)\mathrm{e}^{-x} + 5x\mathrm{e}^{-x}$$

Affirmation 2 : Vrai

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\mathrm{e}^{-x} + 5x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (5 - 5x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Et donc, pour tout $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) &= (5 - 5x)\mathrm{e}^{-x} + 5x\mathrm{e}^{-x} \\ &= 5\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Affirmation 2 : Vrai

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\mathrm{e}^{-x} + 5x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (5 - 5x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Et donc, pour tout $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) &= (5 - 5x)\mathrm{e}^{-x} + 5x\mathrm{e}^{-x} \\ &= 5\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

La fonction f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}$.

2. **Affirmation 3 : Faux**

2. **Affirmation 3 : Faux**
   Soit (u_n) la suite constante égale à 1,

2. **Affirmation 3 : Faux**
Soit (u_n) la suite constante égale à 1, (w_n) la suite constante égale à -1

2. **Affirmation 3 : Faux**
   Soit (u_n) la suite constante égale à 1, (w_n) la suite constante égale à -1 et (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = (-1)^n$.

2. **Affirmation 3 : Faux**
   Soit (u_n) la suite constante égale à 1, (w_n) la suite constante égale à -1 et (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = (-1)^n$. Toutes les hypothèses sont vérifiées mais la suite (v_n) ne converge pas.

2. **Affirmation 3 : Faux**
   Soit (u_n) la suite constante égale à 1, (w_n) la suite constante égale à -1 et (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = (-1)^n$. Toutes les hypothèses sont vérifiées mais la suite (v_n) ne converge pas. On a donc trouvé un contre-exemple, ce qui prouve que l'affirmation est fausse.

Affirmation 4 : Vrai

Affirmation 4 : Vrai

La suite (u_n) étant croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_0 \leqslant u_n$.

Affirmation 4 : Vrai

La suite (u_n) étant croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_0 \leqslant u_n$. De même, la suite (w_n) étant décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_0 \geqslant w_n$.

Affirmation 4 : Vrai

La suite (u_n) étant croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_0 \leqslant u_n$. De même, la suite (w_n) étant décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_0 \geqslant w_n$.
On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Affirmation 4 : Vrai

La suite (u_n) étant croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_0 \leqslant u_n$. De même, la suite (w_n) étant décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_0 \geqslant w_n$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_0$$

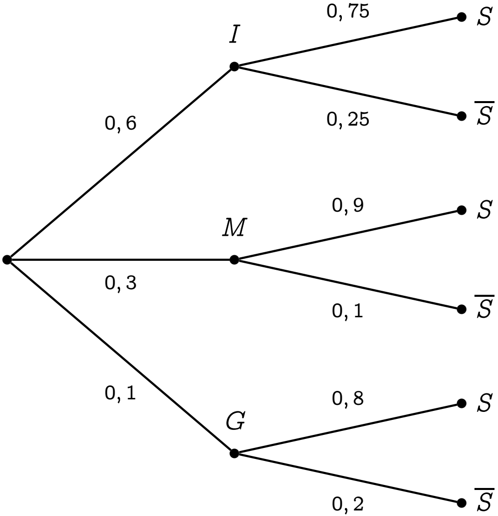
Exercice 2

Exercice 2

1. On complète l'arbre de la façon suivante :

Exercice 2

1. On complète l'arbre de la façon suivante :



2. Il s'agit de calculer $P(I \cap S)$:

2. Il s'agit de calculer $P(I \cap S)$:

$$P(I \cap S) =$$

2. Il s'agit de calculer $P(I \cap S)$:

$$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S)$$

2. Il s'agit de calculer $P(I \cap S)$:

$$\begin{aligned} P(I \cap S) &= P(I) \times P_I(S) \\ &= 0,6 \times 0,75 \end{aligned}$$

2. Il s'agit de calculer $P(I \cap S)$:

$$\begin{aligned} P(I \cap S) &= P(I) \times P_I(S) \\ &= 0,6 \times 0,75 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

2. Il s'agit de calculer $P(I \cap S)$:

$$\begin{aligned} P(I \cap S) &= P(I) \times P_I(S) \\ &= 0,6 \times 0,75 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

La probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle est donc :

2. Il s'agit de calculer $P(I \cap S)$:

$$\begin{aligned} P(I \cap S) &= P(I) \times P_I(S) \\ &= 0,6 \times 0,75 \\ &= 0,45 \end{aligned}$$

La probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle est donc :

$$\boxed{P(I \cap S) = 0,45}$$

3. Les événements I, M et G forment une partition de l'univers.

3. Les événements I, M et G forment une partition de l'univers. On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

3. Les événements I, M et G forment une partition de l'univers. On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) =$$

3. Les événements I, M et G forment une partition de l'univers. On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(I) \times P_I(S) + P(M) \times P_M(S) + P(G) \times P_G(S)$$

3. Les événements I, M et G forment une partition de l'univers. On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(I) \times P_I(S) + P(M) \times P_M(S) + P(G) \times P_G(S) \\ &= 0,6 \times 0,75 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8 \end{aligned}$$

3. Les événements I, M et G forment une partition de l'univers. On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(I) \times P_I(S) + P(M) \times P_M(S) + P(G) \times P_G(S) \\ &= 0,6 \times 0,75 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8 \\ &= 0,45 + 0,27 + 0,08 \end{aligned}$$

3. Les événements I, M et G forment une partition de l'univers. On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(I) \times P_I(S) + P(M) \times P_M(S) + P(G) \times P_G(S) \\ &= 0,6 \times 0,75 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8 \\ &= 0,45 + 0,27 + 0,08 \\ &= 0,8 \end{aligned}$$

3. Les événements I, M et G forment une partition de l'univers. On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(I) \times P_I(S) + P(M) \times P_M(S) + P(G) \times P_G(S) \\ &= 0,6 \times 0,75 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8 \\ &= 0,45 + 0,27 + 0,08 \\ &= 0,8 \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{P(S) = 0,8}$$

4. Il s'agit de calculer $P_S(I)$:

4. Il s'agit de calculer $P_S(I)$:

$$P_S(I) =$$

4. Il s'agit de calculer $P_S(I)$:

$$P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)}$$

4. Il s'agit de calculer $P_S(I)$:

$$\begin{aligned} P_S(I) &= \frac{P(I \cap S)}{P(S)} \\ &= \frac{0,45}{0,8} \end{aligned}$$

4. Il s'agit de calculer $P_S(I)$:

$$\begin{aligned} P_S(I) &= \frac{P(I \cap S)}{P(S)} \\ &= \frac{0,45}{0,8} \\ &\approx 0,563 \end{aligned}$$

4. Il s'agit de calculer $P_S(I)$:

$$\begin{aligned} P_S(I) &= \frac{P(I \cap S)}{P(S)} \\ &= \frac{0,45}{0,8} \\ &\approx 0,563 \end{aligned}$$

La probabilité que le client ait effectué son achat sur internet sachant qu'il est satisfait de son achat est donc :

4. Il s'agit de calculer $P_S(I)$:

$$\begin{aligned} P_S(I) &= \frac{P(I \cap S)}{P(S)} \\ &= \frac{0,45}{0,8} \\ &\approx 0,563 \end{aligned}$$

La probabilité que le client ait effectué son achat sur internet sachant qu'il est satisfait de son achat est donc :

$$\boxed{P_S(I) \approx 0,563}$$

5. (a) On répète 30 fois, de façon identique et indépendante,

5. (a) On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à $0,8$.

5. (a) On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à $0,8$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

5. (a) On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à $0,8$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = 0,8}$$

5. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice,

5. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'au moins 25 clients soient satisfaits est :

5. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'au moins 25 clients soient satisfaits est :

$$\boxed{P(X \geqslant 25) \approx 0,428}$$

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux.

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$.

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n - 1)$.

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) =$$

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y = n)$$

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y = n) = 1 - 0,8^n$$

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y = n) = 1 - 0,8^n$$

On a alors :

$$P(Y \leqslant n-1) \geqslant 0,99 \iff$$

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y = n) = 1 - 0,8^n$$

On a alors :

$$P(Y \leqslant n-1) \geqslant 0,99 \iff 1 - 0,8^n \geqslant 0,99$$

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y = n) = 1 - 0,8^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant n-1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,8^n \geqslant 0,99 \\ &\iff 0,8^n \leqslant 0,01 \end{aligned}$$

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y = n) = 1 - 0,8^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant n-1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,8^n \geqslant 0,99 \\ &\iff 0,8^n \leqslant 0,01 \\ &\iff \ln\left(0,8^n\right) \leqslant \ln(0,01) \quad \textit{(croissance de } \ln\textit{)} \end{aligned}$$

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y = n) = 1 - 0,8^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant n-1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,8^n \geqslant 0,99 \\ &\iff 0,8^n \leqslant 0,01 \\ &\iff \ln\left(0,8^n\right) \leqslant \ln(0,01) \quad \textit{(croissance de } \ln\textit{)} \\ &\iff n\ln(0,8) \leqslant \ln(0,01) \end{aligned}$$

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y = n) = 1 - 0,8^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant n-1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,8^n \geqslant 0,99 \\ &\iff 0,8^n \leqslant 0,01 \\ &\iff \ln\left(0,8^n\right) \leqslant \ln(0,01) \quad \textit{(croissance de } \ln\textit{)} \\ &\iff n\ln(0,8) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \quad \textit{(car } \ln(0,8) < 0\textit{)} \end{aligned}$$

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y = n) = 1 - 0,8^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant n-1) \geqslant 0,99 &\Longleftrightarrow 1 - 0,8^n \geqslant 0,99 \\ &\Longleftrightarrow 0,8^n \leqslant 0,01 \\ &\Longleftrightarrow \ln\left(0,8^n\right) \leqslant \ln(0,01) \quad \textit{(croissance de } \ln\textit{)} \\ &\Longleftrightarrow n\ln(0,8) \leqslant \ln(0,01) \\ &\Longleftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \quad \textit{(car } \ln(0,8) < 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,6$

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y = n) = 1 - 0,8^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant n-1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,8^n \geqslant 0,99 \\ &\iff 0,8^n \leqslant 0,01 \\ &\iff \ln\left(0,8^n\right) \leqslant \ln(0,01) \quad \textit{(croissance de } \ln\textit{)} \\ &\iff n\ln(0,8) \leqslant \ln(0,01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \quad \textit{(car } \ln(0,8) < 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,6$ donc la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à $0,99$ est :

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y = n) = 1 - 0,8^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
P(Y \leqslant n-1) \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,8^n \geqslant 0,99 \\
&\iff 0,8^n \leqslant 0,01 \\
&\iff \ln\left(0,8^n\right) \leqslant \ln(0,01) \quad \textit{(croissance de } \ln\textit{)} \\
&\iff n\ln(0,8) \leqslant \ln(0,01) \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \quad \textit{(car } \ln(0,8) < 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,8)} \approx 20,6$ donc la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à $0,99$ est :

$$\boxed{n = 21}$$

7. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

7. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T) =$$

7. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2)$$

7. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3$$

7. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$$

7. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$$

Et comme les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes :

7. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$$

Et comme les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes :

$$V(T) =$$

7. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$$

Et comme les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes :

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2)$$

7. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$$

Et comme les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes :

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1$$

7. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$$

Et comme les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes :

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$$

7. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$$

Et comme les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes :

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$$

Soit :

$$\boxed{E(T) = 7} \quad \text{et} \quad \boxed{V(T) = 3}$$

7. (b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$.

7. (b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$. Son événement contraire est $(T < 5) \cup (T > 9)$

7. (b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$. Son événement contraire est $(T < 5) \cup (T > 9)$ ou encore, comme T ne prend que des valeurs entières, $(T \leqslant 4) \cup (T \geqslant 10)$.

7. (b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$. Son événement contraire est $(T < 5) \cup (T > 9)$ ou encore, comme T ne prend que des valeurs entières, $(T \leqslant 4) \cup (T \geqslant 10)$. Cet événement s'écrit également $(|T - 7| \geqslant 3)$.

7. (b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$. Son événement contraire est $(T < 5) \cup (T > 9)$ ou encore, comme T ne prend que des valeurs entières, $(T \leqslant 4) \cup (T \geqslant 10)$. Cet événement s'écrit également $(|T - 7| \geqslant 3)$. Or , d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

7. (b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$. Son événement contraire est $(T < 5) \cup (T > 9)$ ou encore, comme T ne prend que des valeurs entières, $(T \leqslant 4) \cup (T \geqslant 10)$. Cet événement s'écrit également $(|T - 7| \geqslant 3)$. Or , d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(|T - E(T)| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{V(T)}{3^2}$$

7. (b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$. Son événement contraire est $(T < 5) \cup (T > 9)$ ou encore, comme T ne prend que des valeurs entières, $(T \leqslant 4) \cup (T \geqslant 10)$. Cet événement s'écrit également $(|T - 7| \geqslant 3)$. Or , d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(|T - E(T)| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{V(T)}{3^2}$$

Soit :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{3}{3^2}$$

7. (b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$. Son événement contraire est $(T < 5) \cup (T > 9)$ ou encore, comme T ne prend que des valeurs entières, $(T \leqslant 4) \cup (T \geqslant 10)$. Cet événement s'écrit également $(|T - 7| \geqslant 3)$. Or , d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(|T - E(T)| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{V(T)}{3^2}$$

Soit :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{3}{3^2}$$

Et donc :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{1}{3}$$

7. (b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$. Son événement contraire est $(T < 5) \cup (T > 9)$ ou encore, comme T ne prend que des valeurs entières, $(T \leqslant 4) \cup (T \geqslant 10)$. Cet événement s'écrit également $(|T - 7| \geqslant 3)$. Or , d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(|T - E(T)| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{V(T)}{3^2}$$

Soit :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{3}{3^2}$$

Et donc :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{1}{3}$$

Et donc, en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|T - 7| < 3|\right) \geqslant 1 - \frac{1}{3}$$

7. (b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$. Son événement contraire est $(T < 5) \cup (T > 9)$ ou encore, comme T ne prend que des valeurs entières, $(T \leqslant 4) \cup (T \geqslant 10)$. Cet événement s'écrit également $(|T - 7| \geqslant 3)$. Or , d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(|T - E(T)| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{V(T)}{3^2}$$

Soit :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{3}{3^2}$$

Et donc :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{1}{3}$$

Et donc, en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|T - 7| < 3|\right) \geqslant 1 - \frac{1}{3} \quad \text{soit} \quad P\left(4 < T < 10\right) \geqslant \frac{2}{3}$$

7. (b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$. Son événement contraire est $(T < 5) \cup (T > 9)$ ou encore, comme T ne prend que des valeurs entières, $(T \leqslant 4) \cup (T \geqslant 10)$. Cet événement s'écrit également $(|T - 7| \geqslant 3)$. Or , d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(|T - E(T)| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{V(T)}{3^2}$$

Soit :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{3}{3^2}$$

Et donc :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{1}{3}$$

Et donc, en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|T - 7| < 3|\right) \geqslant 1 - \frac{1}{3} \quad \text{soit} \quad P\left(4 < T < 10\right) \geqslant \frac{2}{3}$$

Et donc, la probabilité que le client reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est :

7. (b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$. Son événement contraire est $(T < 5) \cup (T > 9)$ ou encore, comme T ne prend que des valeurs entières, $(T \leqslant 4) \cup (T \geqslant 10)$. Cet événement s'écrit également $(|T - 7| \geqslant 3)$. Or , d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(|T - E(T)| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{V(T)}{3^2}$$

Soit :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{3}{3^2}$$

Et donc :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{1}{3}$$

Et donc, en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|T - 7| < 3|\right) \geqslant 1 - \frac{1}{3} \quad \text{soit} \quad P\left(4 < T < 10\right) \geqslant \frac{2}{3}$$

Et donc, la probabilité que le client reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est :

$$\boxed{P\left(5 \leqslant T \leqslant 9\right) \geqslant \frac{2}{3}}$$

Exercice 3

Exercice 3

1. (a) On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$

Exercice 3

1. (a) On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$

Exercice 3

1. (a) On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ et donc :

    - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CA} =$

Exercice 3

1. (a) On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ et donc :

    - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CA} = 1 \times 5 + (-1) \times 5 + 0 \times (-10)$

Exercice 3

1. (a) On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ et donc :

   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CA} = 1 \times 5 + (-1) \times 5 + 0 \times (-10) = 5 - 5 + 0$

Exercice 3

1. (a) On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ et donc :

   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CA} = 1 \times 5 + (-1) \times 5 + 0 \times (-10) = 5 - 5 + 0 = 0.$

Exercice 3

1. (a) On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ et donc :

   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CA} = 1 \times 5 + (-1) \times 5 + 0 \times (-10) = 5 - 5 + 0 = 0.$
   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CD} =$

1. (a) On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ et donc :
   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CA} = 1\times 5 + (-1)\times 5 + 0\times(-10) = 5-5+0 = 0.$
   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CD} = 1\times 0 + (-1)\times 0 + 0\times\left(-\frac{25}{2}\right)$

Exercice 3

1. (a) On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\dfrac{25}{2}\end{pmatrix}$ et donc :

   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CA} = 1 \times 5 + (-1) \times 5 + 0 \times (-10) = 5 - 5 + 0 = 0.$
   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CD} = 1 \times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times \left(-\dfrac{25}{2}\right) = 0.$

Exercice 3

1. (a) On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ et donc :

   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CA} = 1 \times 5 + (-1) \times 5 + 0 \times (-10) = 5 - 5 + 0 = 0.$
   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CD} = 1 \times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times \left(-\frac{25}{2}\right) = 0.$

   Le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD).

Exercice 3

1. (a) On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ et donc :

   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CA} = 1\times 5 + (-1)\times 5 + 0\times(-10) = 5-5+0 = 0.$
   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CD} = 1\times 0 + (-1)\times 0 + 0\times\left(-\frac{25}{2}\right) = 0.$

   Le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD). On en déduit que :

   $$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{n_1} \text{ est normal au plan } (CAD)}$$

1. (b) D'après la question précédente, le plan (CAD) admet une équation cartésienne de la forme :

1. (b) D'après la question précédente, le plan (CAD) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

1. (b) D'après la question précédente, le plan (CAD) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point $C(0\,;0\,;10)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation,

1. (b) D'après la question précédente, le plan (CAD) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point $C(0\,;0\,;10)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, soit $0 - 0 + d = 0$

1. (b) D'après la question précédente, le plan (CAD) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point $C(0\,;\,0\,;\,10)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, soit $0 - 0 + d = 0$ et donc $d = 0$.

1. (b) D'après la question précédente, le plan (CAD) admet une équation cartésienne de la forme :

$$x - y + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point $C(0\,;\,0\,;\,10)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, soit $0 - 0 + d = 0$ et donc $d = 0$. Le plan (CAD) a donc pour équation cartésienne :

$$\boxed{x - y = 0}$$

2. (a) On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ dans l'équation cartésienne de (CAD) :

2. (a) On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ dans l'équation cartésienne de (CAD) :

$$\frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0 \Longleftrightarrow$$

2. (a) On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ dans l'équation cartésienne de (CAD) :

$$\frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{5}{2}t - 5 + \frac{5}{2}t = 0$$

2. (a) On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ dans l'équation cartésienne de (CAD) :

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0 &\Longleftrightarrow \frac{5}{2}t - 5 + \frac{5}{2}t = 0 \\ &\Longleftrightarrow 5t - 5 = 0\end{aligned}$$

2. (a) On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ dans l'équation cartésienne de (CAD) :

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}t-\left(5-\frac{5}{2}t\right)=0 &\iff \frac{5}{2}t-5+\frac{5}{2}t=0\\ &\iff 5t-5=0\\ &\iff 5t=5\end{aligned}$$

2. (a) On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ dans l'équation cartésienne de (CAD) :

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}t-\left(5-\frac{5}{2}t\right)=0 &\iff \frac{5}{2}t-5+\frac{5}{2}t=0\\ &\iff 5t-5=0\\ &\iff 5t=5\\ &\iff t=1\end{aligned}$$

2. (a) On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ dans l'équation cartésienne de (CAD) :

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}t-\left(5-\frac{5}{2}t\right)=0 &\Longleftrightarrow \frac{5}{2}t-5+\frac{5}{2}t=0\\ &\Longleftrightarrow 5t-5=0\\ &\Longleftrightarrow 5t=5\\ &\Longleftrightarrow t=1\end{aligned}$$

Le point H est donc le point de paramètre $t=1$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$, soit :

2. (a) On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ dans l'équation cartésienne de (CAD) :

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}t-\left(5-\frac{5}{2}t\right)=0 &\iff \frac{5}{2}t-5+\frac{5}{2}t=0\\ &\iff 5t-5=0\\ &\iff 5t=5\\ &\iff t=1\end{aligned}$$

Le point H est donc le point de paramètre $t=1$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$, soit :

$$\boxed{H\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)}$$

2. (b) Le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$

2. (b) Le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$ car c'est le point de paramètre $t = 0$ dans la représentation paramétrique précédente.

2. (b) Le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$ car c'est le point de paramètre $t = 0$ dans la représentation paramétrique précédente. Et la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (CAD)

2. (b) Le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$ car c'est le point de paramètre $t = 0$ dans la représentation paramétrique précédente. Et la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (CAD) car elle est dirigée par le vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. (b) Le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$ car c'est le point de paramètre $t = 0$ dans la représentation paramétrique précédente. Et la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (CAD) car elle est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n_1}$, normal au plan (CAD).

2. (b) Le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$ car c'est le point de paramètre $t = 0$ dans la représentation paramétrique précédente. Et la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (CAD) car elle est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n_1}$, normal au plan (CAD). On en déduit que :

2. (b) Le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$ car c'est le point de paramètre $t=0$ dans la représentation paramétrique précédente. Et la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (CAD) car elle est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n_1}$, normal au plan (CAD). On en déduit que :

$$\boxed{H \text{ est le projeté orthogonal de } B \text{ sur le plan } (CAD)}$$

3. (a) On a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

3. (a) On a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 0\end{pmatrix}$

3. (a) On a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{5}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{5}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et donc :

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HA} =$$

3. (a) On a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc :

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HA} = -\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} + 0 \times 0$$

3. (a) On a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et donc :

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HA} = -\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}+0\times 0 = -\frac{25}{4}+\frac{25}{4}$$

3. (a) On a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{5}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{5}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et donc :

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HA} = -\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}+0\times 0 = -\frac{25}{4}+\frac{25}{4} = 0$$

3. (a) On a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et donc :

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HA} = -\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}+0\times 0 = -\frac{25}{4}+\frac{25}{4} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HA}$ sont donc orthogonaux.

3. (a) On a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc :

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HA} = -\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} + \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} + 0 \times 0 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{4} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HA}$ sont donc orthogonaux. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le triangle } ABH \text{ est rectangle en } H}$$

3. (b) On a :

$$HB =$$

3. (b) On a :

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2}$$

3. (b) On a :

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}}$$

3. (b) On a :

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

3. (b) On a :

$$HB=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+0^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{25}{2}}$$

De même, $HA=$

3. (b) On a :

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

De même, $HA = \sqrt{\frac{25}{2}}$

3. (b) On a :

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

De même, $HA = \sqrt{\frac{25}{2}}$ et comme le triangle ABH est rectangle en H, son aire est :

3. (b) On a :

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

De même, $HA = \sqrt{\frac{25}{2}}$ et comme le triangle ABH est rectangle en H, son aire est :

$$\mathscr{A}_{ABH} =$$

3. (b) On a :

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

De même, $HA = \sqrt{\frac{25}{2}}$ et comme le triangle ABH est rectangle en H, son aire est :

$$\mathscr{A}_{ABH} = \frac{HA \times HB}{2}$$

3. (b) On a :

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

De même, $HA = \sqrt{\frac{25}{2}}$ et comme le triangle ABH est rectangle en H, son aire est :

$$\mathscr{A}_{ABH} = \frac{HA \times HB}{2} = \frac{\sqrt{\frac{25}{2}} \times \sqrt{\frac{25}{2}}}{2}$$

3. (b) On a :

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

De même, $HA = \sqrt{\frac{25}{2}}$ et comme le triangle ABH est rectangle en H, son aire est :

$$\mathscr{A}_{ABH} = \frac{HA \times HB}{2} = \frac{\sqrt{\frac{25}{2}} \times \sqrt{\frac{25}{2}}}{2} = \frac{\frac{25}{2}}{2}$$

3. (b) On a :

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

De même, $HA = \sqrt{\frac{25}{2}}$ et comme le triangle ABH est rectangle en H, son aire est :

$$\mathscr{A}_{ABH} = \frac{HA \times HB}{2} = \frac{\sqrt{\frac{25}{2}} \times \sqrt{\frac{25}{2}}}{2} = \frac{\frac{25}{2}}{2} = \frac{25}{4}$$

3. (b) On a :

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

De même, $HA = \sqrt{\frac{25}{2}}$ et comme le triangle ABH est rectangle en H, son aire est :

$$\mathscr{A}_{ABH} = \frac{HA \times HB}{2} = \frac{\sqrt{\frac{25}{2}} \times \sqrt{\frac{25}{2}}}{2} = \frac{\frac{25}{2}}{2} = \frac{25}{4}$$

L'aire du triangle ABH est donc bien :

3. (b) On a :

$$HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

De même, $HA = \sqrt{\frac{25}{2}}$ et comme le triangle ABH est rectangle en H, son aire est :

$$\mathscr{A}_{ABH} = \frac{HA \times HB}{2} = \frac{\sqrt{\frac{25}{2}} \times \sqrt{\frac{25}{2}}}{2} = \frac{\frac{25}{2}}{2} = \frac{25}{4}$$

L'aire du triangle ABH est donc bien :

$$\boxed{\mathscr{A}_{ABH} = \frac{25}{4}}$$

4. (a) On a $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix}$

4. (a) On a $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix}$ et donc :

- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HB} =$

4. (a) On a $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix}$ et donc :

- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HB} = 0 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + (-10) \times 0$

4. (a) On a $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ et donc :

- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HB} = 0 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + (-10) \times 0 = 0.$

4. (a) On a $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix}$ et donc :

- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HB} = 0 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + (-10) \times 0 = 0.$
- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HA} =$

4. (a) On a $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ et donc :

- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HB} = 0 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + (-10) \times 0 = 0.$
- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HA} = 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + (-10) \times 0$

4. (a) On a $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix}$ et donc :

- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HB} = 0 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + (-10) \times 0 = 0.$
- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HA} = 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + (-10) \times 0 = 0.$

4. (a) On a $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ et donc :

- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HB} = 0 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + (-10) \times 0 = 0.$
- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HA} = 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + (-10) \times 0 = 0.$

La droite (CO) est donc orthogonale au plan (ABH),

4. (a) On a $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ et donc :

- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HB} = 0 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + (-10) \times 0 = 0.$
- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HA} = 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\dfrac{5}{2}\right) + (-10) \times 0 = 0.$

La droite (CO) est donc orthogonale au plan (ABH), on en déduit que :

$$\boxed{(CO) \text{ est la hauteur issue de } C \text{ dans le tétraèdre } ABCH}$$

4. (b) Le volume du tétraèdre $ABCH$ est donc :

4. (b) Le volume du tétraèdre $ABCH$ est donc :

$$\mathscr{V}_{ABCH} =$$

4. (b) Le volume du tétraèdre $ABCH$ est donc :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABH} \times CO$$

4. (b) Le volume du tétraèdre $ABCH$ est donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{ABCH} &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABH} \times CO \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10\end{aligned}$$

4. (b) Le volume du tétraèdre $ABCH$ est donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{ABCH} &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABH} \times CO \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 \\ &= \frac{25 \times 10}{3 \times 4}\end{aligned}$$

4. (b) Le volume du tétraèdre $ABCH$ est donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{ABCH} &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABH} \times CO\\ &= \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10\\ &= \frac{25 \times 10}{3 \times 4}\\ &= \frac{125}{6}\end{aligned}$$

4. (b) Le volume du tétraèdre $ABCH$ est donc :

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_{ABCH} &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABH} \times CO \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 \\
&= \frac{25 \times 10}{3 \times 4} \\
&= \frac{125}{6}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{125}{6}}$$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC),

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC),

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$.

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} =$$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC.

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA =$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2}$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et
$BC =$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et
$BC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 10^2}$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et
$BC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{125}$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et
$BC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$,

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et
$BC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, et comme le triangle ABC est rectangle en B, on a :

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et
$BC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, et comme le triangle ABC est rectangle en B, on a :

$$\mathscr{A}_{ABC} =$$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et
$BC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, et comme le triangle ABC est rectangle en B, on a :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{BA \times BC}{2}$$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et
$BC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, et comme le triangle ABC est rectangle en B, on a :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{BA \times BC}{2} = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2}$$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et
$BC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, et comme le triangle ABC est rectangle en B, on a :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{BA \times BC}{2} = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}$$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et
$BC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, et comme le triangle ABC est rectangle en B, on a :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{BA \times BC}{2} = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}$$

$$\mathscr{V}_{ABCH} =$$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or
$BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et
$BC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, et comme le triangle ABC est rectangle en B, on a :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{BA \times BC}{2} = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}$$

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \frac{25\sqrt{5}}{2} \times h = \frac{25\sqrt{5}}{6} \times h$$

Et d'autre part, d'après la question précédente $\mathscr{V}_{ABCH} = \dfrac{125}{6}$

Et d'autre part, d'après la question précédente $\mathscr{V}_{ABCH} = \dfrac{125}{6}$ d'où :

$$\frac{25\sqrt{5}}{6} \times h = \frac{125}{6}$$

Et d'autre part, d'après la question précédente $\mathscr{V}_{ABCH} = \dfrac{125}{6}$ d'où :

$$\frac{25\sqrt{5}}{6} \times h = \frac{125}{6}$$

Et donc :

$$h =$$

Et d'autre part, d'après la question précédente $\mathscr{V}_{ABCH} = \dfrac{125}{6}$ d'où :

$$\frac{25\sqrt{5}}{6} \times h = \frac{125}{6}$$

Et donc :

$$h = \frac{125}{6} \times \frac{6}{25\sqrt{5}}$$

Et d'autre part, d'après la question précédente $\mathscr{V}_{ABCH} = \dfrac{125}{6}$ d'où :

$$\frac{25\sqrt{5}}{6} \times h = \frac{125}{6}$$

Et donc :

$$h = \frac{125}{6} \times \frac{6}{25\sqrt{5}}$$

Finalement, la distance du point H au plan (ABC) est :

Et d'autre part, d'après la question précédente $\mathscr{V}_{ABCH} = \dfrac{125}{6}$ d'où :

$$\frac{25\sqrt{5}}{6} \times h = \frac{125}{6}$$

Et donc :

$$h = \frac{125}{6} \times \frac{6}{25\sqrt{5}}$$

Finalement, la distance du point H au plan (ABC) est :

$$\boxed{h = \sqrt{5}}$$

Exercice 4 - Partie A

Exercice 4 - Partie A

1. (a) On a :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty}$$

Exercice 4 - Partie A

1. (a) On a :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \to 0} (x-2) = -2 \\ \lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{2}\ln(x)\right) = -\infty \end{cases}$$

Exercice 4 - Partie A

1. (a) On a :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} (x-2) = -2 \\ \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{2} \ln(x) \right) = -\infty \end{cases}$$

Et :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

1. (a) On a :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \to 0} (x-2) = -2 \\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2}\ln(x)\right) = -\infty \end{cases}$$

Et :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} (x-2) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\ln(x)\right) = +\infty \end{cases}$$

1. (b) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

1. (b) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x) =$$

1. (b) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$$

1. (b) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{1}{2x} \end{aligned}$$

1. (b) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{1}{2x} \\ &= \frac{2x+1}{2x} \end{aligned}$$

1. (b) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{1}{2x} \\ &= \frac{2x+1}{2x} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x+1}{2x}}$$

1. (c) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$,

1. (c) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a $2x+1>0$

1. (c) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a $2x+1>0$ et $2x>0$

1. (c) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a $2x+1>0$ et $2x>0$ donc $f'(x)>0$.

1. (c) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a $2x+1>0$ et $2x>0$ donc $f'(x)>0$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[}$$

1. (d) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, on a :

1. (d) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$f''(x) =$$

1\. (d) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2 \times 2x - (2x+1) \times 2}{(2x)^2}$$

1. (d) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2 \times 2x - (2x+1) \times 2}{(2x)^2}$$
$$= \frac{4x - 4x - 2}{4x^2}$$

1. (d) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \times 2x - (2x+1) \times 2}{(2x)^2} \\ &= \frac{4x - 4x - 2}{4x^2} \\ &= \frac{-2}{4x^2} \end{aligned}$$

1. (d) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \times 2x - (2x+1) \times 2}{(2x)^2} \\ &= \frac{4x - 4x - 2}{4x^2} \\ &= \frac{-2}{4x^2} \\ &= \frac{-1}{2x^2} \end{aligned}$$

1. (d) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \times 2x - (2x+1) \times 2}{(2x)^2} \\ &= \frac{4x - 4x - 2}{4x^2} \\ &= \frac{-2}{4x^2} \\ &= \frac{-1}{2x^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

1. (d) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \times 2x - (2x+1) \times 2}{(2x)^2} \\ &= \frac{4x - 4x - 2}{4x^2} \\ &= \frac{-2}{4x^2} \\ &= \frac{-1}{2x^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $2x^2 > 0$

1. (d) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{2 \times 2x - (2x+1) \times 2}{(2x)^2} \\
&= \frac{4x - 4x - 2}{4x^2} \\
&= \frac{-2}{4x^2} \\
&= \frac{-1}{2x^2}
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $2x^2 > 0$ donc $f''(x) < 0$.

1. (d) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \times 2x - (2x+1) \times 2}{(2x)^2} \\ &= \frac{4x - 4x - 2}{4x^2} \\ &= \frac{-2}{4x^2} \\ &= \frac{-1}{2x^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$, $2x^2 > 0$ donc $f''(x) < 0$. On en déduit que :

1. (d) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{2 \times 2x - (2x+1) \times 2}{(2x)^2} \\
&= \frac{4x - 4x - 2}{4x^2} \\
&= \frac{-2}{4x^2} \\
&= \frac{-1}{2x^2}
\end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $2x^2 > 0$ donc $f''(x) < 0$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est concave sur }]0\,;+\infty[}$$

2. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$,

2. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante.

2. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

2. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in]-\infty\,;+\infty[$

2. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in\,]-\infty\,;+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

2. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in\,]-\infty\,;+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$.

2. (a) Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in \left]-\infty\,;\,+\infty\right[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$. De plus, on a $f(1) = -1 < 0$

2. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in \left]-\infty\,;+\infty\right[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$. De plus, on a $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = \dfrac{1}{2}\ln(2) > 0$

2. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in]-\infty\,;+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$. De plus, on a $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = \dfrac{1}{2}\ln(2) > 0$ donc :

$$\boxed{1 < \alpha < 2}$$

2. (b) La fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et elle s'annule en α.

2. (b) La fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et elle s'annule en α. On en déduit le tableau de signes :

2. (b) La fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et elle s'annule en α. On en déduit le tableau de signes :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

2. (c) On sait que $f(\alpha) = 0$.

2. (c) On sait que $f(\alpha) = 0$. Or :

$$f(\alpha) = 0 \iff$$

2. (c) On sait que $f(\alpha) = 0$. Or :

$$f(\alpha) = 0 \iff \alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0$$

2. (c) On sait que $f(\alpha) = 0$. Or :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\iff \alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha \end{aligned}$$

2. (c) On sait que $f(\alpha) = 0$. Or :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\iff \alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha \\ &\iff \ln(\alpha) = 2(2 - \alpha) \end{aligned}$$

2. (c) On sait que $f(\alpha) = 0$. Or :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\iff \alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha \\ &\iff \ln(\alpha) = 2(2 - \alpha) \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)}$$

Partie B

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et, pour tout $x \in\,]0\,;\,1]$, on a :

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;1]$ et, pour tout $x \in]0\,;1]$, on a :

$$g'(x) =$$

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et, pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right)$$

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et, pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x \end{aligned}$$

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et, pour tout $x \in\,]0\,;\,1]$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x \\ &= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) \end{aligned}$$

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et, pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x \\ &= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) \end{aligned}$$

Et d'autre part, pour tout $x \in]0\,;\,1]$:

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et, pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) \\
&= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x \\
&= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x)
\end{aligned}$$

Et d'autre part, pour tout $x \in]0\,;\,1]$:

$$xf\left(\frac{1}{x}\right) =$$

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;1]$ et, pour tout $x \in]0\,;1]$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x \\ &= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) \end{aligned}$$

Et d'autre part, pour tout $x \in]0\,;1]$:

$$xf\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et, pour tout $x \in\,]0\,;\,1]$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x \\ &= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) \end{aligned}$$

Et d'autre part, pour tout $x \in\,]0\,;\,1]$:

$$\begin{aligned} xf\left(\frac{1}{x}\right) &= x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= 1 - 2x + \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,1]$ et, pour tout $x \in\,]0\,;\,1]$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x \\ &= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) \end{aligned}$$

Et d'autre part, pour tout $x \in\,]0\,;\,1]$:

$$\begin{aligned} xf\left(\frac{1}{x}\right) &= x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= 1 - 2x + \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) \qquad \textit{(car } \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)\textit{)} \end{aligned}$$

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;1]$ et, pour tout $x \in]0\,;1]$, on a :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right)\\
&= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x\\
&= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x)
\end{aligned}$$

Et d'autre part, pour tout $x \in]0\,;1]$:

$$\begin{aligned}
xf\left(\frac{1}{x}\right) &= x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= 1 - 2x + \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) \qquad \left(\textit{car } \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)\right)
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2. (a) Si $x \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$

2. (a) Si $x \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$ alors $\dfrac{1}{x} \in \left]\alpha\,;\,+\infty\right[$

2. (a) Si $x \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$ alors $\dfrac{1}{x} \in \left]\alpha\,;\,+\infty\right[$ donc, d'après le tableau de signes de f :

2. (a) Si $x \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$ alors $\dfrac{1}{x} \in \left]\alpha\,;\,+\infty\right[$ donc, d'après le tableau de signes de f :

$$\boxed{f\left(\frac{1}{x}\right) > 0}$$

2. (b) On a vu que pour tout $x \in]0\,;\,1]$,

2. (b) On a vu que pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. (b) On a vu que pour tout $x \in]0\,;1]$, $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit le tableau :

2. (b) On a vu que pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit le tableau :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
x		$+$		$+$	
$f\left(\frac{1}{x}\right)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

Partie C

1. (a) Pour tout $x \in \,]0\,;\,1]$, on a :

Partie C

1. (a) Pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) =$$

Partie C

1. (a) Pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x)$$

Partie C

1. (a) Pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x)$$

Or, pour tout $x \in]0\,;\,1]$,

Partie C

1. (a) Pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x)$$

Or, pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $\ln(x) \leqslant 0$

Partie C

1. (a) Pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x)$$

Or, pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $\ln(x) \leqslant 0$ donc :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) \geqslant 0$$

1. (a) Pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x)$$

Or, pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $\ln(x) \leqslant 0$ donc :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) \geqslant 0$$

On en déduit que :

Partie C

1. (a) Pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x)$$

Or, pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $\ln(x) \leqslant 0$ donc :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) \geqslant 0$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{C}_g \text{ est au-dessus de } \mathscr{P} \text{ sur }]0\,;\,1]}$$

1. (b) On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$$

1. (b) On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

1. (b) On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x =$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{x} \times \frac{1}{3}x^3 \, \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{x} \times \frac{1}{3}x^3 \,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{3}x^2 \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{x} \times \frac{1}{3}x^3 \,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{3}x^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3} \times 1^3 \times \underbrace{\ln(1)}_{0} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}_{-\ln(\alpha)} - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{x} \times \frac{1}{3}x^3 \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{3}x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} \times 1^3 \times \underbrace{\ln(1)}_{0} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}_{-\ln(\alpha)} - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \\
&= \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3} - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{\alpha^3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{x} \times \frac{1}{3}x^3 \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{3}x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} \times 1^3 \times \underbrace{\ln(1)}_{0} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}_{-\ln(\alpha)} - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \\
&= \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3} - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{\alpha^3}\right) \\
&= \frac{2(2-\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3} \qquad \textit{(car } \ln(\alpha) = 2(2-\alpha)\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{x} \times \frac{1}{3}x^3 \, \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{3}x^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} \times 1^3 \times \underbrace{\ln(1)}_{0} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}_{-\ln(\alpha)} - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \\
&= \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3} - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{\alpha^3}\right) \\
&= \frac{2(2-\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3} \qquad (\textit{car } \ln(\alpha) = 2(2-\alpha)) \\
&= \frac{12 - 6\alpha - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3}
\end{aligned}$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{x}\times\frac{1}{3}x^3\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{3}x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\times 1^3 \times \underbrace{\ln(1)}_{0} - \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}_{-\ln(\alpha)} - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}$$

$$= \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3} - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9}\times\frac{1}{\alpha^3}\right)$$

$$= \frac{2(2-\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3} \qquad (\textit{car } \ln(\alpha) = 2(2-\alpha))$$

$$= \frac{12 - 6\alpha - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3}$$

$$= \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}}$$

2. Sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{P}$ donc :

2. Sur l'intervalle $]0\,;1]$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{P}$ donc :

$$\mathscr{A} =$$

2. Sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{P}$ donc :

$$\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) \mathrm{d}x$$

2. Sur l'intervalle $]0\,;1]$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{P}$ donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} -\frac{1}{4}x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. Sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{P}$ donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} -\frac{1}{4}x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

2. Sur l'intervalle $]0\,;1]$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{P}$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} -\frac{1}{4}x^2 \ln(x)\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4} \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}
\end{aligned}$$

2. Sur l'intervalle $]0\,;1]$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{P}$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} -\frac{1}{4}x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}}$$