ANNÉE 2024 - SUJET CORRIGÉ 7

MÉTROPOLE - 19 JUIN 2024

Exercice 1

Énoncé (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
   Affirmation 1 :
   L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   Affirmation 2 :
   La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}$.
2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n :
$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$
   De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.
   Affirmation 3 :
   La suite (v_n) converge vers un nombre réel l appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,1]$.

   On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.
   Affirmation 4 :
   Pour tout entier naturel n, on a alors : $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

Correction

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$f(x) = 5 \times \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$
   Et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$
   La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc la droite d'équation $y = 0$ (soit l'axe des abscisses) comme asymptote horizontale en $+\infty$.

   Affirmation 2 : Vrai
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\mathrm{e}^{-x} + 5x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (5 - 5x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$
   Et donc, pour tout $\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) &= (5 - 5x)\mathrm{e}^{-x} + 5x\mathrm{e}^{-x} \\ &= 5\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$
   La fonction f est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}$.

2. **Affirmation 3 : Faux**
   Soit (u_n) la suite constante égale à 1, (w_n) la suite constante égale à -1 et (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = (-1)^n$. Toutes les hypothèses sont vérifiées mais la suite (v_n) ne converge pas. On a donc trouvé un contre-exemple, ce qui prouve que l'affirmation est fausse.

   Affirmation 4 : Vrai
   La suite (u_n) étant croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_0 \leqslant u_n$. De même, la suite (w_n) étant décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_0 \geqslant w_n$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_0$$

Commentaires

- Pour l'affirmation 1, la formule de croissances comparées du cours est la suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

  Autrement dit, l'exponentielle l'emporte sur x. Ici on est en présence du rapport inverse donc la limite va être 0. Si l'on souhaite se ramener vraiment à la formule du cours, on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}$$

  Et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, on en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.
- Pour l'affirmation 2, il ne faut pas chercher à résoudre l'équation différentielle mais il faut simplement vérifier que f est une solution. Il suffit alors de remplacer y par f et montrer que l'égalité est vérifiée.
- Pour l'affirmation 3, on est tenté de penser au théorème des gendarmes mais les deux suites « qui encadrent » n'ont pas la même limite. Cela laisse donc trop d'espace à la suite qui est encadrée et ne la contraint pas à converger.

Exercice 2

Énoncé (5 points)

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30 % des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75 % pour les clients sur internet ;
- 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80 % pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

On définit les événements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

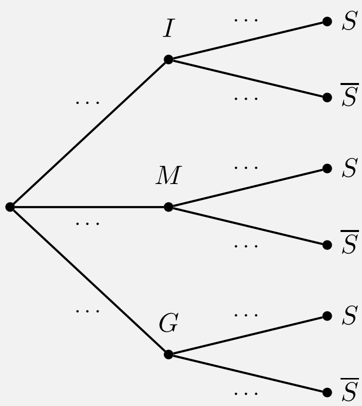
Si A est un événement quelconque, on notera $\overline{A}$ son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.

2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

3. Démontrer que $P(S) = 0{,}8$.

4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.



5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.
6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.
7. Dans les deux questions 7a et 7b qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet. Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2.

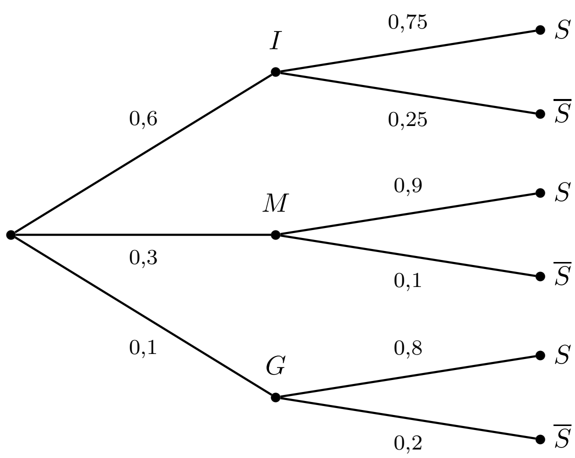
   La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

   On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :
   - L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
   - L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

   (a) Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.
   (b) Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\dfrac{2}{3}$.

Correction

1. On complète l'arbre de la façon suivante :



2. Il s'agit de calculer $P(I \cap S)$:

$$\begin{aligned} P(I \cap S) &= P(I) \times P_I(S) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}75 \\ &= 0{,}45 \end{aligned}$$

La probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle est donc :

$$\boxed{P(I \cap S) = 0{,}45}$$

3. Les événements I, M et G forment une partition de l'univers. On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(I) \times P_I(S) + P(M) \times P_M(S) + P(G) \times P_G(S) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}75 + 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}8 \\ &= 0{,}45 + 0{,}27 + 0{,}08 \\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{P(S) = 0{,}8}$$

4. Il s'agit de calculer $P_S(I)$:

$$\begin{aligned} P_S(I) &= \frac{P(I \cap S)}{P(S)} \\ &= \frac{0{,}45}{0{,}8} \\ &\approx 0{,}563 \end{aligned}$$

La probabilité que le client ait effectué son achat sur internet sachant qu'il est satisfait de son achat est donc :

$$\boxed{P_S(I) \approx 0{,}563}$$

5. (a) On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à 0,8. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = 0{,}8}$$

(b) On obtient, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'au moins 25 clients soient satisfaits est :

$$\boxed{P(X \geqslant 25) \approx 0{,}428}$$

6. Soit n le nombre de clients contactés et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits parmi eux. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}8$. La probabilité qu'au moins un client ne soit pas satisfait est donc égale à $P(Y \leqslant n-1)$. Or on a :

$$P(Y \leqslant n-1) = 1 - P(Y = n) = 1 - 0{,}8^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant n-1) \geqslant 0{,}99 &\iff 1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}99 \\ &\iff 0{,}8^n \leqslant 0{,}01 \\ &\iff \ln\left(0{,}8^n\right) \leqslant \ln(0{,}01) \quad \textit{(croissance de } \ln\textit{)} \\ &\iff n \ln(0{,}8) \leqslant \ln(0{,}01) \\ &\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \qquad \textit{(car } \ln(0{,}8) < 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \approx 20{,}6$ donc la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99 est :

$$\boxed{n = 21}$$

7. (a) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$$

Et comme les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes :

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$$

Soit :

$$\boxed{E(T) = 7} \quad \text{et} \quad \boxed{V(T) = 3}$$

(b) On s'intéresse ici à la probabilité de l'événement $(5 \leqslant T \leqslant 9)$. Son événement contraire est $(T < 5) \cup (T > 9)$ ou encore, comme T ne prend que des valeurs entières, $(T \leqslant 4) \cup (T \geqslant 10)$. Cet événement s'écrit également $(|T - 7| \geqslant 3)$. Or , d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(|T - E(T)| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{V(T)}{3^2}$$

Soit :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{3}{3^2}$$

Et donc :

$$P\left(|T - 7| \geqslant 3|\right) \leqslant \frac{1}{3}$$

Et donc, en passant à l'événement contraire :

$$P\left(|T - 7| < 3|\right) \geqslant 1 - \frac{1}{3}$$

Soit :

$$P\left(4 < T < 10\right) \geqslant \frac{2}{3}$$

Et donc, la probabilité que le client reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est :

$$\boxed{P\left(5 \leqslant T \leqslant 9\right) \geqslant \frac{2}{3}}$$

Commentaires

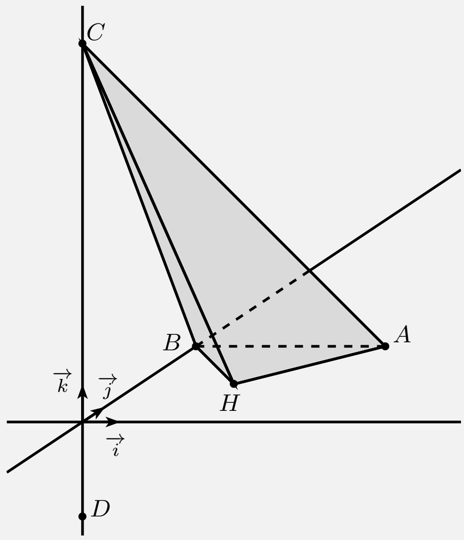
- Dans la question 6, plutôt que d'introduire une variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits, on aurait pu introduire une variable aléatoire égale au nombre de clients qui ne sont pas satisfaits. Cette variable aléatoire, Z, suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}2$ et il s'agit de résoudre $P(Z \geqslant 1) \geqslant 0{,}99$, soit $1 - P(Z = 0) \geqslant 0{,}99$. Et comme $P(Z = 0) = 0{,}8^n$, on retombe sur la même inéquation.
- Dans la question 7a, la variance de la somme est égale à la somme des variances car les variables aléatoires sont indépendantes. Il ne faut donc pas oublier de donner cet argument, ce qui n'est pas nécessaire pour l'espérance (la formule est toujours vraie).
- Dans la question 7b, on souhaite minorer une probabilité. Pour cela, on majore la probabilité de l'événement contraire. En effet, si $P(\overline{A}) \leqslant p$ alors $P(A) \geqslant 1 - p$.

Exercice 3

Énoncé (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$.

On considère les points $A(5\,;5\,;0)$, $B(0\,;5\,;0)$, $C(0\,;0\,;10)$ et $D\left(0\,;0\,;-\dfrac{5}{2}\right)$.



1. (a) Montrer que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).
   (b) En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x-y=0$.

2. On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}t\\ y=5-\dfrac{5}{2}t\\ z=0\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.
   (a) On admet que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\dfrac{5}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\,;\,0\right)$.
   (b) Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).
3. (a) Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.
   (b) En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\dfrac{25}{4}$.
4. (a) Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C.
   (b) En déduire le volume du tétraèdre $ABCH$.
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V=\dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$ où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

Correction

1. (a) On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$ et donc :
   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CA}=1\times5+(-1)\times5+0\times(-10)=5-5+0=0.$
   - $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CD}=1\times0+(-1)\times0+0\times\left(-\dfrac{25}{2}\right)=0.$

   Le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD). On en déduit que :

   $$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{n_1} \text{ est normal au plan } (CAD)}$$

   (b) D'après la question précédente, le plan (CAD) admet une équation cartésienne de la forme :

   $$x-y+d=0$$

De plus, le point $C(0\,;\,0\,;\,10)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, soit $0-0+d=0$ et donc $d=0$. Le plan (CAD) a donc pour équation cartésienne :

$$\boxed{x-y=0}$$

2. (a) On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ dans l'équation cartésienne de (CAD) :

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}t-\left(5-\frac{5}{2}t\right)=0 &\iff \frac{5}{2}t-5+\frac{5}{2}t=0\\ &\iff 5t-5=0\\ &\iff 5t=5\\ &\iff t=1\end{aligned}$$

Le point H est donc le point de paramètre $t=1$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$, soit :

$$\boxed{H\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)}$$

(b) Le point B appartient à la droite $\mathscr{D}$ car c'est le point de paramètre $t=0$ dans la représentation paramétrique précédente. Et la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan (CAD) car elle est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ -\frac{5}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ qui est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n_1}$, normal au plan (CAD). On en déduit que :

$$\boxed{H \text{ est le projeté orthogonal de } B \text{ sur le plan } (CAD)}$$

3. (a) On a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{5}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et donc :

$$\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HA}=-\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}+0\times 0=-\frac{25}{4}+\frac{25}{4}=0$$

Les vecteur $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HA}$ sont donc orthogonaux. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le triangle } ABH \text{ est rectangle en } H}$$

(b) On a :

$$HB=\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+0^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{25}{2}}$$

De même, $HA=\sqrt{\frac{25}{2}}$ et comme le triangle ABH est rectangle en H, son aire est :

$$\mathscr{A}_{ABH}=\frac{HA\times HB}{2}=\frac{\sqrt{\frac{25}{2}}\times\sqrt{\frac{25}{2}}}{2}=\frac{\frac{25}{2}}{2}=\frac{25}{4}$$

L'aire du triangle ABH est donc bien :

$$\boxed{\mathscr{A}_{ABH}=\frac{25}{4}}$$

4. (a) On a $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -10\end{pmatrix}$ et donc :

- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HB}=0\times\left(-\frac{5}{2}\right)+0\times\left(\frac{5}{2}\right)+(-10)\times 0=0.$

- $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{HA} = 0 \times \left(\frac{5}{2}\right) + 0 \times \left(\frac{5}{2}\right) + (-10) \times 0 = 0.$

La droite (CO) est donc orthogonale au plan (ABH), on en déduit que :

$$\boxed{(CO) \text{ est la hauteur issue de } C \text{ dans le tétraèdre } ABCH}$$

(b) Le volume du tétraèdre $ABCH$ est donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{V}_{ABCH} &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABH} \times CO \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10 \\ &= \frac{25 \times 10}{3 \times 4} \\ &= \frac{125}{6}\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{125}{6}}$$

5. Soit h la distance du point H au plan (ABC), il s'agit de la distance entre le point H et le projeté orthogonal de H sur le plan (ABC), autrement dit de la hauteur issue de H dans le tétraèdre $ABCH$. En prenant le triangle ABC comme base, le volume du tétraèdre $ABCH$ est égal à :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABC} \times h$$

où $\mathscr{A}_{ABC}$ désigne l'aire du triangle ABC. Or $BA = \sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et $BC = \sqrt{0^2 + 5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, et comme le triangle ABC est rectangle en B, on a :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{BA \times BC}{2} = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi :

$$\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \frac{25\sqrt{5}}{2} \times h = \frac{25\sqrt{5}}{6} \times h$$

Et d'autre part, d'après la question précédente $\mathscr{V}_{ABCH} = \frac{125}{6}$ d'où :

$$\frac{25\sqrt{5}}{6} \times h = \frac{125}{6}$$

Et donc :

$$h = \frac{125}{6} \times \frac{6}{25\sqrt{5}}$$

Finalement, la distance du point H au plan (ABC) est :

$$\boxed{h = \sqrt{5}}$$

Commentaires

- Dans la question 2a, au lieu de déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (CAD), on pouvait simplement vérifier qu'il s'agissait du point H. Il suffit alors de montrer que :
  → Le point H appartient au plan (ABC).
  → La droite (BH) est orthogonale au plan (ABC).
- Dans la question 5, l'idée est d'exprimer de deux façons une même quantité (ici le volume du tétraèdre) afin d'en déduire une troisième quantité (ici une distance). Un tétraèdre ayant 4 faces, son volume peut s'exprimer de 4 façons différentes.

- Détaillons la simplification de l'expression de h dans la question 5 :

$$\begin{aligned} h &= \frac{125}{6} \times \frac{6}{25\sqrt{5}} \\ &= \frac{5 \times \cancel{25} \times \cancel{6}}{\cancel{6} \times \cancel{25} \times \sqrt{5}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5} \times \cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Exercice 4

Énoncé (6 points)

Partie A : étude de la fonction f.

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. (a) Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (b) Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.
   (c) Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.
   (d) Étudier la convexité de f sur $]0\,;+\infty[$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0\,;+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1\,;2]$.
   (b) Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0\,;+\infty[$.
   (c) Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g.

La fonction g est définie sur $]0\,;1]$ par $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0\,;1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. (a) Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.
   (b) On admet le tableau de signes suivant :

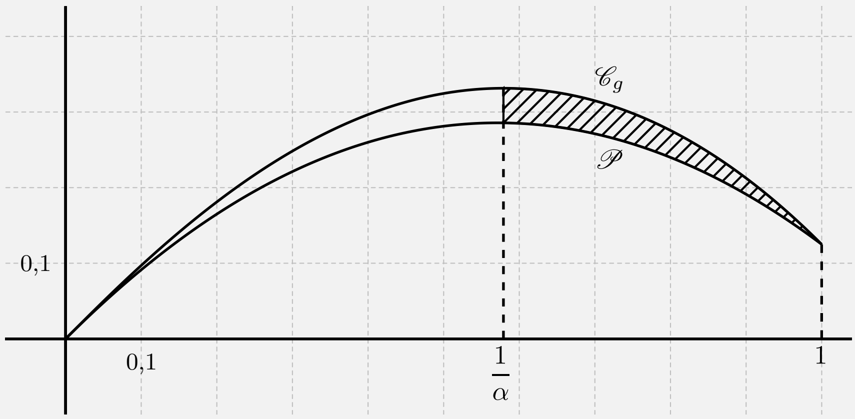
x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$		$+$	0	$-$	

   En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\,;1]$.
   Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ;
- La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$, et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

1. (a) Justifier la position relative des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.
   (b) Démontrer l'égalité :
$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$
   (c) En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathscr{A}$.

Correction
Partie A

1. (a) On a :
$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}(x-2) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2}\ln(x)\right) = -\infty \end{cases}$$
   Et :
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty}(x-2) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{2}\ln(x)\right) = +\infty \end{cases}$$
   (b) La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$, on a :
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} \\ &= 1 + \frac{1}{2x} \\ &= \frac{2x+1}{2x} \end{aligned}$$
   Soit :
$$\boxed{f'(x) = \frac{2x+1}{2x}}$$
   (c) Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a $2x + 1 > 0$ et $2x > 0$ donc $f'(x) > 0$. On en déduit que :
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;\,+\infty[}$$

(d) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2 \times 2x - (2x+1) \times 2}{(2x)^2} \\ &= \frac{4x - 4x - 2}{4x^2} \\ &= \frac{-2}{4x^2} \\ &= \frac{-1}{2x^2} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $2x^2 > 0$ donc $f''(x) < 0$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est concave sur }]0\,;+\infty[}$$

2. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in]-\infty\,;+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$. De plus, on a $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = \frac{1}{2}\ln(2) > 0$ donc :

$$\boxed{1 < \alpha < 2}$$

(b) La fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et elle s'annule en α. On en déduit le tableau de signes :

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$	||	$-$	0	$+$	

(c) On sait que $f(\alpha) = 0$. Or :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\iff \alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0 \\ &\iff \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha \\ &\iff \ln(\alpha) = 2(2-\alpha) \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)}$$

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;1]$ et, pour tout $x \in]0\,;1]$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x \\ &= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) \end{aligned}$$

Et d'autre part, pour tout $x \in]0\,;1]$:

$$\begin{aligned} xf\left(\frac{1}{x}\right) &= x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= 1 - 2x + \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) \qquad \textit{(car } \ln\left(\tfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)\textit{)} \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2. (a) Si $x \in \left]0\,;\,\dfrac{1}{\alpha}\right[$ alors $\dfrac{1}{x} \in]\alpha\,;\,+\infty[$ donc, d'après le tableau de signes de f :

$$\boxed{f\left(\frac{1}{x}\right) > 0}$$

(b) On a vu que pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit le tableau :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
x		$+$		$+$	
$f\left(\frac{1}{x}\right)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	

Partie C

1. (a) Pour tout $x \in]0\,;\,1]$, on a :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x)$$

Or, pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $\ln(x) \leqslant 0$ donc :

$$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) \geqslant 0$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{C}_g \text{ est au-dessus de } \mathscr{P} \text{ sur }]0\,;\,1]}$$

(b) On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{x} \times \frac{1}{3}x^3 \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{1}{3}x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} \times 1^3 \times \underbrace{\ln(1)}_{0} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 \underbrace{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}_{-\ln(\alpha)} - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \\
&= \frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3} - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{\alpha^3}\right) \\
&= \frac{2(2-\alpha)}{3\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3} \qquad (\textit{car } \ln(\alpha) = 2(2-\alpha)) \\
&= \frac{12 - 6\alpha - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3} \\
&= \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}}$$

(c) Sur l'intervalle $]0\,;\,1]$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{P}$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} -\frac{1}{4}x^2 \ln(x) \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4} \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x) \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{A} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}}$$

Commentaires

- Le fait que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ s'interprète graphiquement en disant que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) pour asymptote verticale.
- Lorsque l'on effectue une intégration par parties, on a tendance dériver la fonction qui devient plus simple après dérivation et à « primitiver » celle qui ne se complique pas trop après « primitivation ». Cependant, pour intégrer par parties une expression de la forme $x^n \ln(x)$, il est intéressant de « primitiver » la fonction $x \mapsto x^n$ (même si cela semble compliquer les choses) et de dériver la fonction ln.