ANNÉE 2024 - SUJET CORRIGÉ 6

ASIE - 11 JUIN 2024

Exercice 1

Énoncé

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x^2 - x\ln(x)$.
On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$
On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$.
On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g. Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
   Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n\ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. Justifier que la suite (u_n) converge.

On appelle l la limite de la suite (u_n) et on admet que l vérifie l'égalité $f(l) = l$.

3. Déterminer la valeur de l.

Correction
Partie A

1. • **Limite en 0 :**
   On a :
$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0 \quad \textit{(par croissances comparées)} \end{cases}$$

   • **Limite en $+\infty$:**
   Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a :
$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$
   Et donc :
$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \textit{(par croissances comparées)} \end{cases}$$

2. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) \\ &= 2x - (\ln(x) + 1) \\ &= 2x - \ln(x) - 1 \end{aligned}$$
   Soit :
$$\boxed{f'(x) = 2x - \ln(x) - 1}$$

3. La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:
$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x-1}{x} \end{aligned}$$
   Soit :
$$\boxed{f''(x) = \frac{2x-1}{x}}$$

4. Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x - 1$. On en déduit le tableau :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	↘	$\ln(2)$	↗	

   Le minimum est atteint en $\dfrac{1}{2}$ et :
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 + \ln(2) - 1 = \ln(2)$$

5. D'après son tableau de variations, la fonction f' atteint son minimum en $\dfrac{1}{2}$ et ce minimum vaut $\ln(2)$. Or $\ln(2) \approx 0{,}69 > 0$ donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;\,+\infty[}$$

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{1}{x} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

   Soit :

$$\boxed{g'(x) = \frac{x-1}{x}}$$

   Or, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x - 1$. Et comme $g(1) = 1 - \ln(1) = 1$, on a le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\Vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^2 - x\ln(x) = x \\ &\iff x^2 - x\ln(x) - x = 0 \\ &\iff x\,(x - \ln(x) - 1) = 0 \\ &\iff x - \ln(x) - 1 = 0 \quad \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ &\iff x - \ln(x) = 1 \\ &\iff g(x) = 1 \end{aligned}$$

   Or l'équation $g(x) = 1$ admet 1 pour unique solution donc l'équation $f(x) = x$ admet pour ensemble solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$:

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1\}}$$

Partie C

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et :

$$u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) \approx 0{,}6$$

     On a donc bien $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$ et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :
  $$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
  On a alors, en appliquant la fonction f qui est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$:
  $$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$$
  Soit :
  $$f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$$
  Et comme $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}6 \geqslant \frac{1}{2}$, on a, a fortiori :
  $$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$$
  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$\boxed{\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1}$$

2. D'après la question précédente, la suite (u_n) est :
   - croissante (car $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)
   - majorée par 1 (car $u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

   On en déduit que :
   $$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$
3. On a vu, dans la question 2 de la partie B, que l'équation $f(x) = x$ admettait 1 pour unique solution sur $]0\,;\,+\infty[$. Or l est solution de cette équation donc :
   $$\boxed{l = 1}$$

Commentaires

- Dans la question 2 de la partie B, on admet que l'équation $g(x) = 1$ admet 1 pour unique solution. On aurait tout de même pu le justifier à l'aide des variations de la fonction g. En effet, g est strictement décroissante sur $]0\,;\,1]$, strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$ et admet 1 pour minimum en 1. Elle est donc strictement supérieure à 1 pour tout $x \neq 1$.
- Dans la question 3 de la partie C, on admet que la limite l vérifie $f(l) = l$. Ce résultat est en fait un résultat du cours à connaître. On dit que l est un point fixe pour la fonction f.

Exercice 2

Énoncé

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.
Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas. Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.
De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

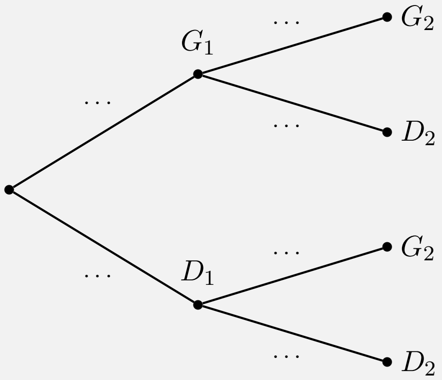
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les événements suivants :

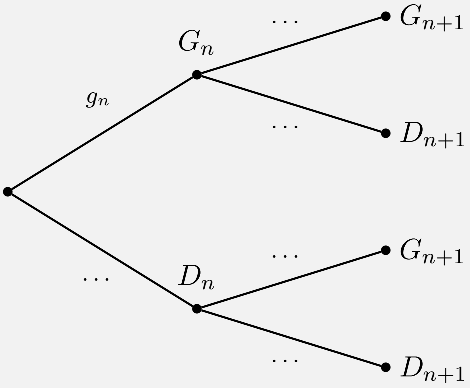
- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'événement G_n. On a donc $g_1 = 0{,}5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{G_1}(D_2)$?
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2.
4. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $g_{n+1} = 0{,}5g_n + 0{,}2$.
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0{,}4$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4$.

6. Étudier les variations de la suite (g_n).
7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0{,}4 \leqslant 0{,}001$.
9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0{,}4 + e$ où e est un nombre réel strictement positif.

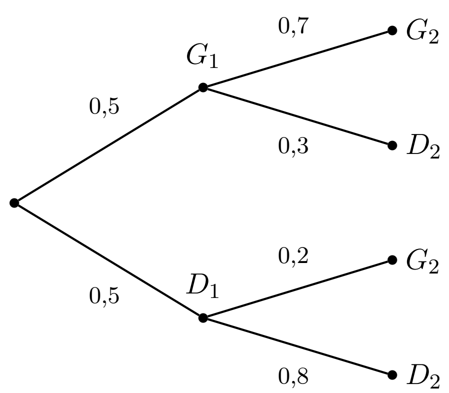
```python
def seuil(e):
    g=0.5
    n=1
    while ...:
        g=0.5*g+0.2
        n=...
    return (n)
```

Correction

1. Il s'agit de la probabilité que Léa perde la deuxième partie sachant qu'elle a gagné la première. Or lorsqu'elle gagne une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas donc elle la perd dans 30 % des cas. On a donc :

$$\boxed{P_{G_1}(D_2) = 0{,}3}$$

2. On complète l'arbre de la façon suivante :



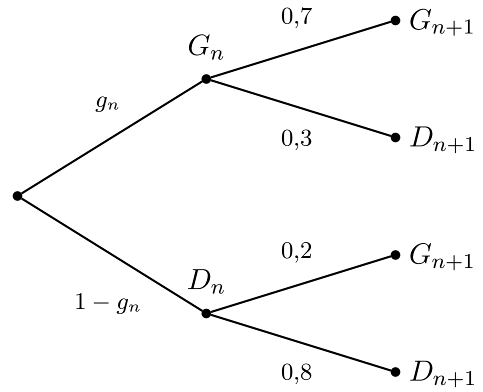
3. Il s'agit de calculer $P(G_2)$. Les événements G_1 et D_1 forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(D_1) \times P_{D_1}(G_2) \\ &= 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}45 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{g_2 = 0{,}45}$$

4.(a) On complète l'arbre de la façon suivante :



(b) Les événements G_n et D_n forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(G_{n+1}) &= P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(G_{n+1}) \\ &= g_n \times 0{,}7 + (1 - g_n) \times 0{,}2 \\ &= 0{,}7g_n + 0{,}2 - 0{,}2g_n \\ &= 0{,}5g_n + 0{,}2 \end{aligned}$$

Soit, pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{g_{n+1} = 0{,}5g_n + 0{,}2}$$

5.(a) Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= g_{n+1} - 0{,}4 \\ &= 0{,}5g_n + 0{,}2 - 0{,}4 \\ &= 0{,}5g_n - 0{,}2 \\ &= 0{,}5\,(g_n - 0{,}4) \\ &= 0{,}5v_n \end{aligned}$$

Et comme $v_1 = g_1 - 0{,}4 = 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}1$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } 0{,}5 \text{ et de } 1^{\text{er}} \text{ terme } v_1 = 0{,}1}$$

(b) D'après la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 \times 0{,}5^{n-1}$, soit :

$$v_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1}$$

Et comme $v_n = g_n - 0{,}4$, on a $g_n = v_n + 0{,}4$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= 0{,}1 \times 0{,}5^n + 0{,}4 - (0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4) \\ &= 0{,}1 \times 0{,}5^n + 0{,}4 - 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} - 0{,}4 \\ &= 0{,}1 \times 0{,}5^n - 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} \\ &= 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1}(0{,}5 - 1) \\ &= 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} \times (-0{,}5) \\ &= -0{,}1 \times 0{,}5^n \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_{n+1} - g_n < 0$ et donc que :

$$\boxed{\text{La suite } (g_n) \text{ est strictement décroissante}}$$

7. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(0{,}5^{n-1}\right)=0$ car $-1<0{,}5<1$ donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} g_n = 0{,}4}$$

Cela signifie qu'à long terme, la probabilité que Léa gagne une partie sera proche de 0,4. Ou encore que Léa gagnera environ 40 % des parties.

8. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} g_n-0{,}4\leqslant 0{,}001 &\iff 0{,}1\times 0{,}5^{n-1}+0{,}4-0{,}4\leqslant 0{,}001\\ &\iff 0{,}1\times 0{,}5^{n-1}\leqslant 0{,}001\\ &\iff 0{,}5^{n-1}\leqslant 0{,}01\\ &\iff \ln\left(0{,}5^{n-1}\right)\leqslant \ln(0{,}01)\\ &\iff (n-1)\ln(0{,}5)\leqslant \ln(0{,}01)\\ &\iff n-1\geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)} \quad (\text{car } \ln(0{,}5)<0) \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)}\approx 6{,}6$ donc $n-1\geqslant 7$. On en déduit que le plus petit entier n tel que $g_n-0{,}4\leqslant 0{,}001$ est :

$$\boxed{n=8}$$

9. On peut compléter l'algorithme de la façon suivante :

```python
def seuil(e):
    g = 0.5
    n = 1
    while g > 0.4 + e :
        g = 0.5*g + 0.2
        n = n+1
    return (n)
```

Commentaires

- Dans la question 5a, plutôt que de factoriser par 0,5, on peut utiliser le fait que $g_n=v_n+0{,}4$ et présenter de la façon suivante :

$$\begin{aligned} v_{n+1}&=g_{n+1}-0{,}4\\ &=0{,}5g_n+0{,}2-0{,}4\\ &=0{,}5g_n-0{,}2\\ &=0{,}5(v_n+0{,}4)-0{,}2\\ &=0{,}5v_n+0{,}2-0{,}2\\ &=0{,}5v_n \end{aligned}$$

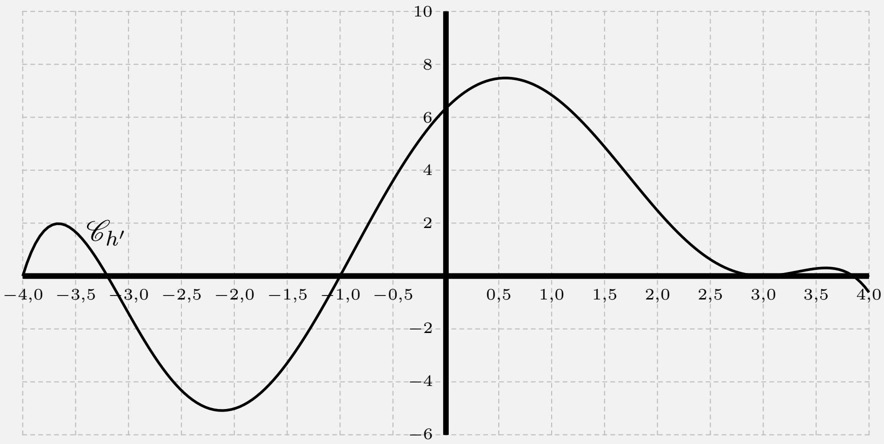
Et on retrouve bien que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5.

Exercice 3

Énoncé

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante : pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} < u_n \leqslant \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}$.
   Affirmation 1 : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
2. Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$.
   La représentation graphique $\mathscr{C}_{h'}$ de la fonction de sa fonction dérivée h' est donnée ci-dessous.



   Affirmation 2 : La fonction h est convexe sur $[-1\,;\,3]$.
3. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).
   Affirmation 3 : Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.
4. On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.
   Affirmation 4 : La fonction f est solution sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$xy' - y = x$$

Correction

1. **Affirmation 1 : Vrai**
   On a :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{6n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
   Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
2. **Affirmation 2 : Faux**
   On peut remarquer que, sur l'intervalle $[-1\,;\,3]$, la fonction dérivée h' est croissante puis décroissante. On en déduit que la fonction h est convexe puis concave.
3. **Affirmation 3 : Vrai**
   - Calculons d'abord le nombre total de codes possibles. Le nombre de possibilités pour le choix des 4 chiffres est égal au nombre de 4-uplets dans un ensemble à 10 éléments (les 10 chiffres compris entre 0 et 9). Il y en a donc $10^4 = 10\,000$. Le nombre de possibilités pour le choix des 2 lettres est égal au nombre de 2-uplets d'éléments distincts dans un ensemble à 3 éléments (les 3 lettres A, B et C). Il y en a donc $3 \times 2 = 6$. Le nombre de codes possibles est donc $10\,000 \times 6 = 60\,000$.

- Déterminons maintenant le nombre de codes ne contenant aucun 0. Le nombre de possibilités pour le choix des 4 chiffres est égal au nombre de 4-uplets dans un ensemble à 9 éléments (les 9 chiffres compris entre 1 et 9). Il y en a donc $9^4 = 6\,561$ Le nombre de possibilités pour le choix des 2 lettres est égal au nombre de 2-uplets d'éléments distincts dans un ensemble à 3 éléments (les 3 lettres A, B et C). Il y en a donc $3 \times 2 = 6$. Le nombre de codes possibles ne contenant aucun 0 est donc $6\,561 \times 6 = 39\,366$.
- Finalement, le nombre de codes contenant au moins un 0 est égal à $60\,000 - 39\,366 = 20\,634$.

4. **Affirmation 4 : Vrai**
La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

On a alors, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} x \times f'(x) - f(x) &= x\left(\ln(x) + 1\right) - x\ln(x) \\ &= x\ln(x) + x - x\ln(x) \\ &= x \end{aligned}$$

Donc la fonction f est bien solution sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle $xy' - y = x$.

Commentaires

- Dans la question 1, j'ai utilisé le fait que la limite d'un quotient de suites polynomiales est égale au quotient des limites des termes de plus haut degré. On aurait également pu factoriser, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1} = \frac{n^2\left(3 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(6 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}}{6 + \frac{1}{n^2}}$$

On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 + \frac{4}{n} + \frac{7}{n^2}\right) = 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(6 + \frac{1}{n^2}\right) = 6$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^2 + 4n + 7}{6n^2 + 1} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ par quotient.
- Dans la question 2, c'est la courbe de la fonction dérivée qui est donnée. Or ce sont les variations de la dérivée qui permettent de déterminer la convexité de la fonction de départ. Si l'on nous avait donné la courbe de la fonction dérivée seconde alors c'est son signe qu'il aurait fallu étudier afin de déterminer la convexité de la fonction de départ.
- Dans la question 3, lorsque dans la question figure le terme « au moins un », comme en probabilités, il est souvent plus simple de s'intéresser au complémentaire, c'est-à-dire à « aucun ».
- Dans la question 4, on ne sait pas résoudre l'équation différentielle donnée (car le coefficient devant y' dépend de x). Mais cela n'est pas grave car il s'agit ici uniquement de vérifier qu'une fonction est solution.

Exercice 4

Énoncé

Dans un repère orthonormé $(0\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :

$$(P)\ :\ 2x+2y-3z+1=0$$

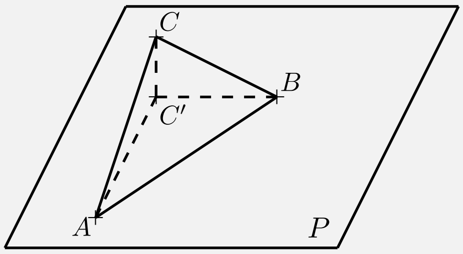
On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

$$A(1\,;\,0\,;\,1)\,,B(2\,;\,-1\,;\,1)\text{ et }C(-4\,;\,-6\,;\,5)$$

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).
2. Montrer que le point $C'(0\,;\,-2\,;\,-1)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions $\begin{cases} H\in(AB) \\ (AB)\text{ et }(HC)\text{ sont orthogonales}\end{cases}$
   Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont : $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix}-\dfrac{11}{2}\\-\dfrac{11}{2}\\4\end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\|\overrightarrow{HC}\|$.
2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

Partie C

On admet que $HC'=\sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha=\widehat{CHC'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.
2. (a) Montrer que les droites $(C'H)$ et (AB) sont perpendiculaires.
   (b) Calculer S' l'aire du triangle ABC', on donnera la valeur exacte.
   (c) Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

Correction

Partie A

1. On a :
   - $2\times1+2\times0-3\times1+1=2-3+1=0$ donc :

$$\boxed{\text{Le point } A \text{ appartient au plan } (P)}$$

- $2 \times 2 + 2 \times (-1) - 3 \times 1 + 1 = 4 - 2 - 3 + 1 = 0$ donc :

$$\boxed{\text{Le point } B \text{ appartient au plan } (P)}$$

- $2 \times (-4) + 2 \times (-6) - 3 \times 5 + 1 = -8 - 12 - 15 + 1 = -34 \neq 0$ donc :

$$\boxed{\text{Le point } C \text{ n'appartient pas au plan } (P)}$$

2. Il s'agit de montrer que le point C' appartient au plan (P) et que le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ est orthogonal au plan (P).
   - On a $2 \times 0 + 2 \times (-2) - 3 \times (-1) + 1 = -2 + 3 - 1 = 0$ donc le point C' appartient au plan (P).
   - On a $\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ et le plan (P) admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{n}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ est orthogonal au plan (P).

   On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point } C' \text{ est le projeté orthogonal du point } C \text{ sur le plan } (P)}$$

3. La droite (AB) passe par le point $A(1\,;\,0\,;\,1)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

   Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}} \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Le point H appartient à la droite (AB), il existe donc un réel t tel que $H(1+t\,;\,-t\,;\,1)$. On a alors $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix} -5-t \\ -6+t \\ 4 \end{pmatrix}$ et donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{HC} \text{ sont orthogonaux} &\iff \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = 0 \\ &\iff 1 \times (-5-t) + (-1) \times (-6+t) + 0 \times 4 = 0 \\ &\iff -5 - t + 6 - t = 0 \\ &\iff 2t = 1 \\ &\iff t = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Le point H est donc le point de paramètre $t = \frac{1}{2}$, soit :

$$\boxed{H\left(\frac{3}{2}\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,1\right)}$$

Partie B

1. On a :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{HC}\| &= \sqrt{\left(-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{2}\right)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{121}{4} + 16} \\ &= \sqrt{\frac{153}{2}}\end{aligned}$$

   Soit :

$$\boxed{\|\overrightarrow{HC}\| = \sqrt{\frac{153}{2}}}$$

2. On a $AB = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $[CH]$ est la hauteur issue de C dans le triangle ABC. On a donc :

$$\begin{aligned}S &= \frac{AB \times CH}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{153}{2}}}{2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{153}}{\sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{153}}{2}\end{aligned}$$

   Soit :

$$\boxed{S = \frac{3\sqrt{17}}{2}}$$

Partie C

1. Dans le triangle CHC', rectangle en C', on a :

$$\begin{aligned}\cos\left(\widehat{CHC'}\right) &= \frac{HC'}{HC} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{17}{2}}}{\sqrt{\frac{153}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{17} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{153}} \\ &= \sqrt{\frac{17}{153}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

   Soit :

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{1}{3}}$$

2.(a) On a $\overrightarrow{C'H}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{C'H}.\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\times 1 + \frac{3}{2}\times(-1) + (-2)\times 0 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{C'H}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc orthogonaux. On en déduit que :

$$\boxed{\text{Les droites } (C'H) \text{ et } (AB) \text{ sont perpendiculaires}}$$

(b) Dans le triangle ABC', HC' est la hauteur issue de C'. On a donc :

$$S' = \frac{AB\times HC'}{2} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{17}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Soit :

$$\boxed{S' = \frac{\sqrt{17}}{2}}$$

(c) On peut remarquer que :

$$\boxed{S' = S\times\cos(\alpha)}$$

Commentaires

- Dans la question 2, on aurait également pu déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par C orthogonalement au plan (P) puis déterminer les coordonnées du point d'intersection de cette droite avec le plan (P).
- Le point H, dont on a déterminé les coordonnées dans la question 4 de la partie A, est en fait le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
- Dans la question de la partie C, on peut tout simplement remarquer, d'après nos calculs que $S' = \frac{1}{3}S$ et comme $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$, on a $S' = S\times\cos(\alpha)$. Mais, d'une manière générale, on a $\cos(\alpha) = \frac{HC'}{HC}$ donc $HC' = HC\times\cos(\alpha)$ et donc :

$$\begin{aligned} S' &= \frac{AB\times HC'}{2}\\ &= \frac{AB\times HC\times\cos(\alpha)}{2}\\ &= \frac{AB\times HC}{2}\times\cos(\alpha)\\ &= S\times\cos(\alpha)\end{aligned}$$