ANNÉE 2024 - SUJET CORRIGÉ 5

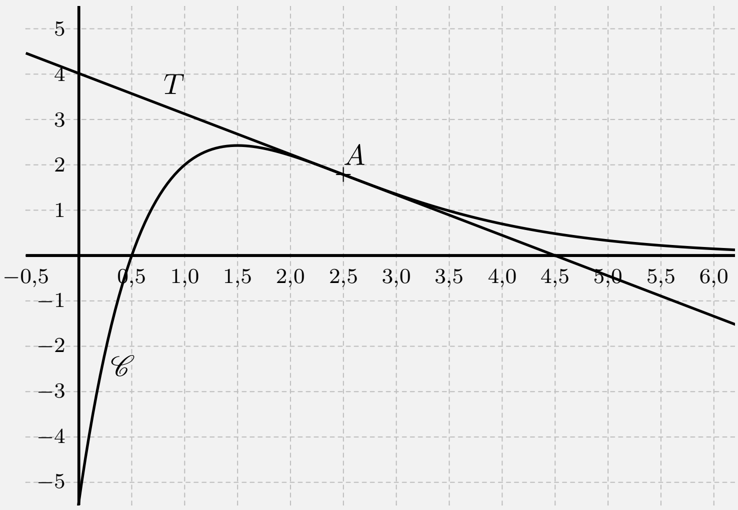
ASIE - 10 JUIN 2024

Exercice 1

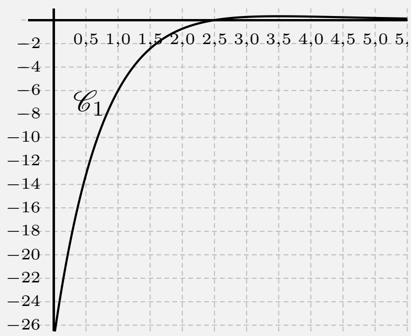
Énoncé

Partie A

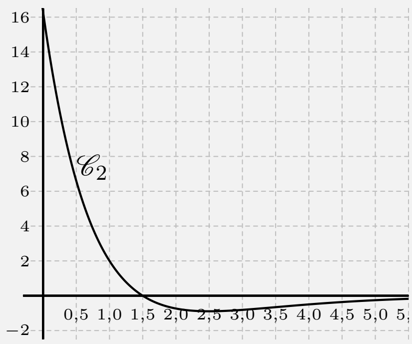
On considère une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$, représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous. La droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.



1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2. Que semble présenter la courbe $\mathscr{C}$ au point A ?
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.
   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente. Ce choix sera justifié.

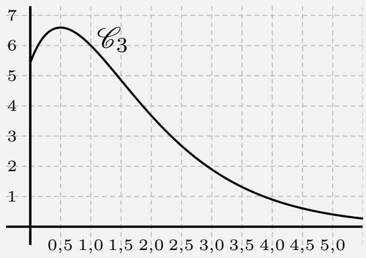


Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

4. La courbe $\mathscr{C}_3$ ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\,;+\infty[$, d'une primitive de la fonction f ? Justifier.

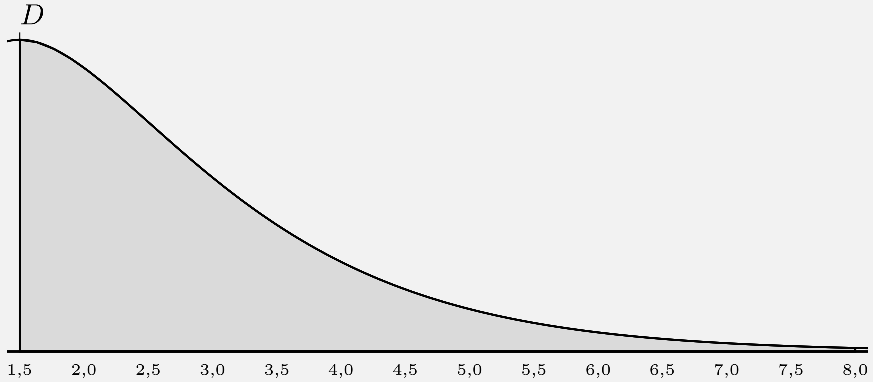


Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;+\infty[$ est définie par $f(x) = (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$.

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f
   (a) Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}$.
   (b) Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   (c) Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.
2. On considère une fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.
   (a) Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
   (b) On admet que $F(x) = (-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$. En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale
$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$$
3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.
   Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2}\,;\,8\right]$.
   L'unité de longueur est le mètre.



   (a) Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.
   (b) La municipalité a organisé un concours de graffitti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75 % de la surface du mur. Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de 0,8 m^2, déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.

Correction
Partie A

1. Le tableau de variations de f semble être le suivant :

x	0		1,5		5
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

2. Au point A, la courbe $\mathscr{C}$ semble traverser sa tangente. On peut donc conjecturer que :

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C} \text{ semble présenter un point d'inflexion en } A}$$

3. La fonction f est croissante sur $[0\,;\,1{,}5]$ et décroissante sur $[1{,}5\,;\,+\infty[$, sa fonction dérivée est donc positive sur $[0\,;\,1{,}5]$ et négative sur $[1{,}5\,;\,+\infty[$. On en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{C}_2 \text{ est la courbe représentative de } f'}$$

La fonction f est concave sur $[0\,;\,2{,}5]$ et convexe sur $[2{,}5\,;\,+\infty[$, sa fonction dérivée seconde est donc négative sur $[0\,;\,2{,}5]$ et positive sur $[2{,}5\,;\,+\infty[$. On en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{C}_1 \text{ est la courbe représentative de } f''}$$

4. La fonction f est négative sur $[0\,;\,0{,}5]$ et positive sur $[0{,}5\,;\,+\infty[$ donc si F est une primitive de f alors F est décroissante sur $[0\,;\,0{,}5]$ et croissante sur $[0{,}5\,;\,+\infty[$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C}_3 \text{ ne peut pas être la courbe d'une primitive de } f}$$

Partie B

1.(a) La fonction f est dérivable, comme produit de fonctions dérivables, sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times \mathrm{e}^{-x+1} + (4x-2) \times (-\mathrm{e}^{-x+1}) \\ &= 4\mathrm{e}^{-x+1} - (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1} \\ &= (4-4x+2)\mathrm{e}^{-x+1} \\ &= (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}}$$

(b) Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-4x+6$. On a alors le tableau :

x	0		1,5		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-2\mathrm{e}$	$\nearrow$	$\dfrac{4}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\searrow$	0

(c) La fonction f' est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4 \times \mathrm{e}^{-x+1} + (-4x+6) \times (-\mathrm{e}^{-x+1}) \\ &= (-4+4x-6)\mathrm{e}^{-x+1} \\ &= (4x-10)\mathrm{e}^{-x+1} \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{-x+1} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(4x-10)$. On a alors le tableau :

x	0		$2{,}5$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		concave		convexe	

On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le point d'abscisse 2,5 est un point d'inflexion}}$$

2.(a) La fonction F est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= a\mathrm{e}^{-x+1} + (ax+b) \times (-\mathrm{e}^{-x+1}) \\ &= (a-ax-b)\mathrm{e}^{-x+1} \\ &= (-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x+1} \end{aligned}$$

On veut que $F'(x) = f(x)$, on a alors, par identification des coefficients :

$$\begin{cases} -a = 4 \\ a-b = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -4 \\ -4-b = -2 \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{\begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[F(x)\Big]_{\frac{3}{2}}^{8} \\ &= \Big[(-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}\Big]_{\frac{3}{2}}^{8} \\ &= (-4\times 8-2)\mathrm{e}^{-8+1} - \left(-4\times\frac{3}{2}-2\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1} \\ &= -34\mathrm{e}^{-7} + 8\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I = -34\mathrm{e}^{-7} + 8\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 4{,}82}$$

3.(a) On a $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{4}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 2{,}43$. La hauteur du point de départ D est donc de :

$$\boxed{2{,}43 \text{ mètres}}$$

(b) La surface, en m^2, du mur est donnée par l'intégrale calculée dans la question précédente, elle est donc d'environ $4{,}82$ m^2. Elle souhaite en couvrir 75 %, soit $4{,}82 \times 0{,}75 \approx 3{,}62$ m^2. Une bombe aérosol couvre $0{,}8$ m^2 et $\dfrac{3{,}62}{0{,}8} \approx 4{,}5$. Il faudra donc :

$$\boxed{5 \text{ bombes}}$$

Commentaires

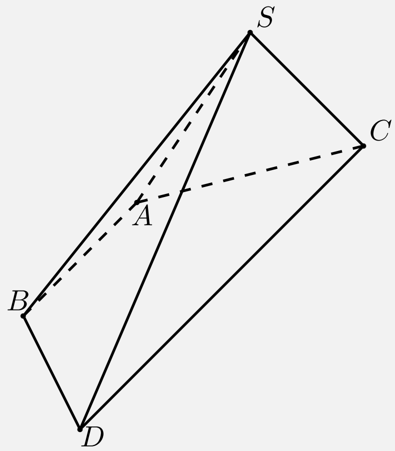
- Dans la question 1b de la partie B, on demande le tableau de variations complet, il faut donc calculer les images. Détaillons leurs calculs :
  - → $f(0) = (4 \times 0 - 2)\mathrm{e}^1 = -2\mathrm{e}$
  - → $f(1{,}5) = (4 \times 1{,}5 - 2)\mathrm{e}^{-1{,}5+1} = 4\mathrm{e}^{-0{,}5} = \dfrac{4}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

Exercice 2

Énoncé

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(0\,;\,\overrightarrow{i}\,,\,\overrightarrow{j}\,,\,\overrightarrow{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A(3\,;\,-1\,;\,1)$, $B(4\,;\,-1\,;\,0)$, $C(0\,;\,3\,;\,2)$, $D(4\,;\,3\,;\,-2)$ et $S(2\,;\,1\,;\,4)$.

Dans cet exercice on souhaite montrer que $SABDC$ est une pyramide à base $ABDC$ trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. (a) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.
   (b) Montrer que le quadrilatère $ABDC$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$.
   On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
3. (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(2\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).
   (d) On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC). Montrer que le point I a pour coordonnées $I\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$, puis montrer que $SI = 2$ cm.
4. (a) Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées $H(3\,;\,3\,;\,-1)$ et montrer que $HB = 3\sqrt{2}$ cm.
   (b) Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze $ABDC$.
   On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathscr{A} = \frac{b+B}{2} \times h$$

   où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.
5. Déterminer le volume de la pyramide $SABDC$.
   On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ d'une pyramide est donné par la formule

$$\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \textit{aire de la base} \times \textit{hauteur}$$

Correction

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc :

$$\boxed{\text{Les points } A,\ B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$$

2.(a) On a, de plus, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$. On peut alors remarquer que :

$$\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et donc que :

$$\boxed{\text{Les points } A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ sont coplanaires}}$$

(b) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. On en déduit que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et donc que :

$$\boxed{\text{Le quadrilatère } ABDC \text{ est un trapèze de bases } [AB] \text{ et } [CD]}$$

3.(a) On a :

- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 2\times 1 + 1\times 0 + 2\times(-1) = 2-2 = 0$
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 2\times(-3) + 1\times 4 + 2\times 1 = -6+4+2 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal au plan } (ABC)}$$

(b) Le plan (ABC) admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$2x + y + 2z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point A appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, soit $2\times 3 - 1 + 2\times 1 + d = 0$. On a donc $7 + d = 0$ d'où $d = -7$. Le plan (ABC) admet donc pour équation cartésienne :

$$\boxed{2x + y + 2z - 7 = 0}$$

(c) La droite Δ passe par le point $S(2\,;\,1\,;\,4)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}} \quad t \in \mathbb{R}$$

(d) On injecte les expression de la représentation paramétrique de Δ dans l'équation cartésienne du plan (ABC) :

$$\begin{aligned}2(2+2t)+1+t+2(4+2t)-7=0 &\Longleftrightarrow 4+4t+1+t+8+4t-7=0\\&\Longleftrightarrow 9t=-6\\&\Longleftrightarrow t=-\frac{6}{9}\\&\Longleftrightarrow t=-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Le point I est donc le point de paramètre $t=-\dfrac{2}{3}$ dans la représentation paramétrique de Δ, c'est-à-dire le point de coordonnées :

$$\left(2+2\times\left(-\frac{2}{3}\right)\,;\,1+\left(-\frac{2}{3}\right)\,;\,4+2\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$$

Soit :

$$\boxed{I\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}SI&=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-2\right)^2+\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{8}{3}-4\right)^2}\\&=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}}\\&=\sqrt{\frac{36}{9}}\\&=\sqrt{4}\\&=2\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{SI=2}$$

4.(a) La droite (CD) passe par le point $C(0\,;\,3\,;\,2)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases}x=4t'\\y=3\\z=2-4t'\end{cases}}\quad t\in\mathbb{R}$$

On peut alors remarquer que le point H appartient à la droite (CD) car c'est le point de paramètre $t'=\dfrac{3}{4}$. De plus, on a $\overrightarrow{HB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CD}=1\times4+(-4)\times0+1\times(-4)=0$.

La droite (HB) est donc orthogonale à la droite (CD). On a donc montré que :

$$\boxed{H(3\,;\,3\,;\,-1)\text{ est le projeté orthogonal de }B\text{ sur }(CD)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} HB &= \sqrt{(4-3)^2 + (-1-3)^2 + (0-(-1))^2} \\ &= \sqrt{1^1 + (-4)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{1+16+1} \\ &= \sqrt{18} \\ &= \sqrt{9 \times 2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{HB = 3\sqrt{2}}$$

(b) On a $AB = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $CD = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. L'aire du trapèze $ABDC$ est alors :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{ABDC} &= \frac{AB \times CD}{2} \times HB \\ &= \frac{\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} \\ &= 4 \times 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{A}_{ABDC} = 12\sqrt{2}}$$

5. Pour calculer le volume $\mathscr{V}_{SABDC}$ de la pyramide $SABDC$, on utilise la base $ABCD$ et la hauteur correspondante SI. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_{SABDC} &= \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{ABDC} \times SI \\ &= \frac{1}{3} \times 12\sqrt{2} \times 2 \\ &= 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\mathscr{V}_{SABDC} = 8\sqrt{2}}$$

Commentaires

- Dans la question 2a, pour montrer que les vecteurs sont coplanaires, j'ai trouvé une relation « à vue d'œil » en remarquant qu'une des coordonnées était nulle donc il n'y avait pas trop le choix. On aurait également pu considérer deux réels α et β et résoudre un système :

$$\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \iff \begin{cases} \alpha - 3\beta = 1 \\ 4\beta = 4 \\ -\alpha + \beta = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - 3 = 1 \\ \beta = 1 \\ -\alpha + 1 = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1 \\ \alpha = 4 \end{cases}$$

  Les valeurs $\alpha = 4$ et $\beta = 3$ conviennent, d'où la relation.
- Dans la question , on aurait pu simplement vérifier que les coordonnées du point I vérifiaient à la fois l'équation cartésienne du plan (ABC) et la représentation paramétrique de la droite Δ.

Exercice 3

Énoncé

Dans la revue Lancet Public Health, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.
Source : https ://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667(21)00064-5/fulltext

On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
   On note I l'événement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
   Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?
2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   (b) Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
   (c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   (d) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   (e) Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0{,}9$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection),

si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.
Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.
Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.

La sensibilité d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai positif).

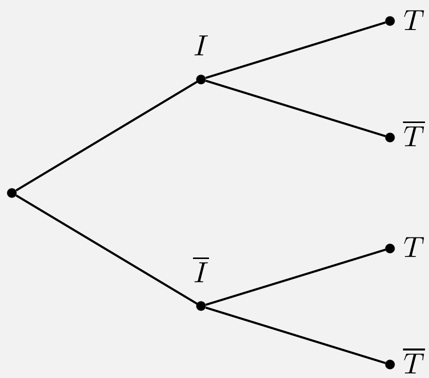
La spécificité d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai négatif).

Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

- Sa sensibilité est de 0,8.
- Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note T l'événement « le test réalisé est positif ».

1. Compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :



2. Montrer que $P(T) = 0{,}05503$.
3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif ?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

Partie C
On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité 0,8 et de spécificité 0,99.
Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de 29,44 %.
On choisit au hasard un individu de ce groupe ; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?

Correction
Partie A

1. D'après l'énoncé, la probabilité que l'individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 est :

$$\boxed{P(I) = 0{,}057}$$

2. (a) On répète 100 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est 0,057. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 100 \text{ et } p = 0{,}057}$$

   (b) X suivant une loi binomiale, son espérance est $E(X) = n \times p = 100 \times 0{,}057$, soit :

$$\boxed{E(X) = 5{,}7}$$

   Cela signifie que le nombre moyen de personnes ayant déjà été infectées sur un échantillon de 100 personnes et de 5,7.

(c) Il s'agit de calculer $P(X = 0)$. Or $P(X = 0) = (1-0{,}057)^{100} = 0{,}943^{100} \approx 0{,}0028$. La probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon est donc :

$$\boxed{P(X = 0) \approx 0{,}0028}$$

(d) Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 2)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon est :

$$\boxed{P(X \geqslant 2) \approx 0{,}9801}$$

(e) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $P(X \leqslant 8) \approx 0{,}88 < 0{,}9$
- $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}94 > 0{,}9$

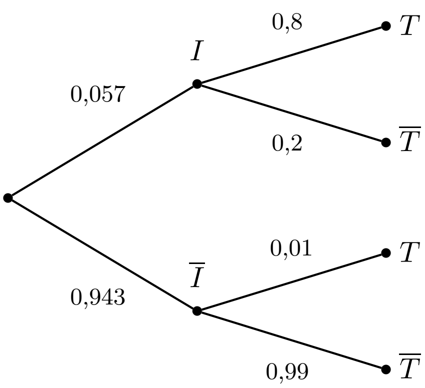
Le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0{,}9$ est donc :

$$\boxed{n = 9}$$

Cela signifie que l'on est sûr à plus de 90 % qu'il y a moins de 9 personnes infectées dans l'échantillon de 100 personnes.

Partie B

1. On complète l'arbre de la façon suivante :



2. Les événements I et $\overline{I}$ forment une partition de l'univers. On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(I) \times P_I(T) + P(\overline{I}) \times P_{\overline{I}}(T) \\ &= 0{,}057 \times 0{,}8 + 0{,}943 \times 0{,}01 \\ &= 0{,}05503 \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{P(T) = 0{,}05503}$$

3. Il s'agit de calculer $P_T(I)$:

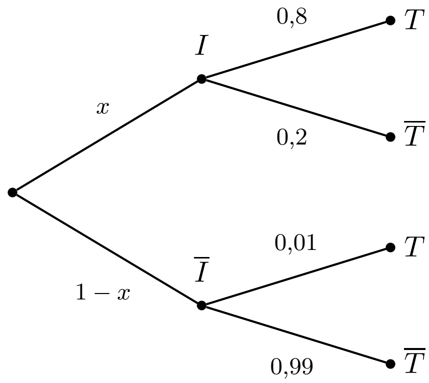
$$\begin{aligned} P_T(I) &= \frac{P(I \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0{,}057 \times 0{,}8}{0{,}05503} \\ &\approx 0{,}8286 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif est donc :

$$\boxed{P_T(I) \approx 0{,}8286}$$

Partie C

En prenant les même notation que dans la partie B, on a maintenant $P(T) = 0{,}2944$. Soit $x = P(I)$ la probabilité cherchée. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(T) &= x \times 0{,}8 + (1-x) \times 0{,}01 \\ &= 0{,}8x + 0{,}01 - 0{,}01x \\ &= 0{,}79x + 0{,}01 \end{aligned}$$

Or $P(T) = 0{,}2944$, il s'agit alors de résoudre une équation :

$$\begin{aligned} 0{,}79x + 0{,}01 = 0{,}2944 &\iff 0{,}79x = 0{,}2844 \\ &\iff x = \frac{0{,}2844}{0{,}79} \\ &\iff x = 0{,}36 \end{aligned}$$

La probabilité que la personne ait déjà été infectée est donc :

$$\boxed{P(I) = 0{,}36}$$

Commentaires

- Dans la question 2c de la partie A, on aurait également pu utiliser directement la calculatrice pour calculer la probabilité demandée.
- Dans la question 2d de la partie A, on aurait pu passer au complémentaire :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - 0{,}943^{100} - 100 \times 0{,}057 \times 0{,}943^{99} \\ &\approx 0{,}9801 \end{aligned}$$

Exercice 4

Énoncé

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. Affirmation 1 : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
2. On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n, on a $u_n \leqslant \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$.
   Affirmation 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```
def terme(N):
    U=1
    for i in range(N):
        U=U+i
    return U
```

   Affirmation 3 : `terme(4)` renvoie la valeur 7.
4. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :
   - Prix A : il reçoit 1 000 euros par jour pendant 15 jours ;
   - Prix B : il reçoit 1 euro le 1er jour, 2 euros le 2e jour, 4 euros le 3e jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

   Affirmation 4 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.
5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $v_n = \displaystyle\int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x$.
   Affirmation 5 : La suite (v_n) est croissante.

Correction

1. **Affirmation 1 : Faux**
   Toute suite décroissante et minorée par 0 est convergente mais la limite n'est pas nécessairement 0. En effet, considérons la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
   $$u_n = 2 + \frac{1}{n}$$
   Cette suite est décroissante et minorée par 2, donc a fortiori minorée par 0. Et elle ne converge pas vers 0 mais vers 2.
2. **Affirmation 2 : Vrai**
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{-9^n + 3^n}{7^n} = -\dfrac{9^n}{7^n} + \dfrac{3^n}{7^n} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n + \left(\dfrac{3}{7}\right)^n$. Or $\dfrac{9}{7} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{9}{7}\right)^n = +\infty$ et $-1 < \dfrac{3}{7} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{7}\right)^n = 0$. On en déduit que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{-9^n + 3^n}{7^n} = -\infty$$
   Et par le théorème de majoration $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. **Affirmation 3 : Vrai**
   La fonction `terme(4)` renvoie la valeur de $1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 7$.
4. **Affirmation 4 : Faux**

   - La valeur du prix A est égale à $1\,000 \times 15$, soit 15 000 euros.

- La valeur S du prix B est égale à la somme des 15 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2. On a donc :

$$S = 1 \times \frac{1-2^{15}}{1-2} = 32\,767$$

5. **Affirmation 5 : Vrai**
Sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, la fonction ln est positive donc plus n est grand, plus l'intégrale est grande. La suite (v_n) est donc croissante.

Commentaires

- En Python, la commande « `for i in range(N)` » permet de faire varier `i` de 0 à $N-1$.
- Dans la question 4, on peut remarquer que la valeur du prix B est plus de 2 fois plus élevée que celle du prix A. Elle dépasse déjà celle du prix A au bout de 14 jours.
- Dans la question 5, si l'on souhaite être plus précis, on peut écrire, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \int_1^{n+1} \ln x \, \mathrm{d}x - \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x \\ &= \int_n^{n+1} \ln x \, \mathrm{d}x \qquad \textit{(relation de Chasles)} \end{aligned}$$

Et cette intégrale est positive car la fonction ln est positive sur $[n\,;\,n+1]$ et les bornes sont « dans l'ordre ». On a donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et on en déduit que la suite (v_n) est croissante.