ANNÉE 2024 - SUJET CORRIGÉ 4

CENTRES ÉTRANGERS - 6 JUIN 2024

Exercice 1

Énoncé

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.
À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.
Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.
Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage corrspondant est $(4\,;\,5\,;\,1)$.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. (a) Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   (b) En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.
Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1.

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
6. Déterminer $P(S = 24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
   (a) Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
   (b) En déduire la probabilité de gagner un lot.

Correction

1. Il s'agit du nombre de triplets dans un ensemble à 8 éléments. Le nombre de tirages possibles est donc :

$$\boxed{8^3 = 512}$$

2. (a) Il s'agit du nombre de triplets d'éléments distincts dans un ensemble à 8 éléments. Le nombre de tirages sans répétition de numéro est donc :

$$\boxed{\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336}$$

(b) Le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro est donc :

$$\boxed{512 - 336 = 176}$$

3. La variable aléatoire X_1 suit une loi uniforme sur l'ensemble des entiers compris entre 1 et 8. Autrement dit sa loi est donnée par le tableau :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

4. Calculons l'espérance $E(X_1)$ de la variable aléatoire X_1 :

$$\begin{aligned}E(X_1) &= 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{8} + 5 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{8} + 7 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{7}{8} + \frac{8}{8} \\ &= \frac{36}{8} \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{E(X_1) = \frac{9}{2} = 4{,}5}$$

5. On a $S = X_1 + X_2 + X_3$ donc, par linéarité de l'espérance, l'espérance de S est :

$$\begin{aligned}E(S) &= E(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) \\ &= 4{,}5 + 4{,}5 + 4{,}5 \\ &= 13{,}5\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{E(S) = 13{,}5}$$

6. La seule façon d'obtenir une somme égale à 24 est d'obtenir 8 pour chacun des trois jetons. On a donc :

$$\begin{aligned}P(S = 24) &= P\left((X_1 = 8) \cap (X_2 = 8) \cap (X_3 = 8)\right) \\ &= P(X_1 = 8) \times P(X_2 = 8) \times P(X_3 = 8) \quad \textit{(par indépendance)} \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{512}\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{P(S = 24) = \frac{1}{512}}$$

7.(a) Les tirages permettant d'obtenir une somme supérieure ou égale à 22 sont : $(8\,;\,8\,;\,8)$, $(7\,;\,8\,;\,8)$, $(8\,;\,7\,;\,8)$, $(8\,;\,8\,;\,7)$, $(7\,;\,7\,;\,8)$, $(7\,;\,8\,;\,7)$, $(8\,;\,7\,;\,7)$, $(6\,;\,8\,;\,8)$, $(8\,;\,6\,;\,8)$ et $(8\,;\,8\,;\,6)$. Soit :

$$\boxed{10 \text{ tirages}}$$

(b) Tous les tirages étant équiprobables, la probabilité de gagner un lot est donc :

$$\boxed{P(S \geqslant 22) = \frac{10}{512} = \frac{5}{256}}$$

Commentaires

- La loi uniforme n'est pas au programme de terminale mais sinon on aurait pu calculer l'espérance de X_1 à l'aide de la formule :

$$E(X_1) = \frac{1+8}{2}$$

- Dans la question 6, on aurait aussi pu remarquer que sur les 512 tirage possibles, il y en a un seul qui permet d'obtenir une somme égale à 24, d'où :

$$P(S=24) = \frac{1}{512}$$

Exercice 2

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1.(a) Déterminer la limite de la fonction f en 1.
  (b) En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3.(a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;1[$, on a $f'(x) = \dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$.
  (b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.
4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;1[$, on a $f''(x) = \dfrac{(x^2-4x+5)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}$.
  (a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.
  (b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
  (c) En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;1[$, on a : $\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1)$.
5.(a) Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$.
  (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Correction

1.(a) On a :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \mathrm{e}^x = \mathrm{e} > 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-1) = 0^- \end{cases}$$

  (b) On en déduit que :

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C} \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x=1}$$

2. On a :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty \end{cases}$$

3.(a) La fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$, comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x \in]-\infty\,;1[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x \times (x-1) - \mathrm{e}^x \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1-1)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}}$$

(b) Pour tout $x \in]-\infty\,;1[$, on a $\mathrm{e}^x > 0$, $x-2<0$ et $(x-1)^2>0$ donc $f'(x) > 0$. On en déduit le tableau :

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

4.(a) Pour tout $x \in]-\infty\,;1[$, $\mathrm{e}^x > 0$, $(x-1)^3 < 0$ (car $x-1<0$) et $x^2-4x+5>0$ (car c'est un polynôme du second degré sans racine réelle). On en déduit que, pour tout $x \in]-\infty\,;1[$, $f''(x) < 0$ et donc que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est concave sur }]-\infty\,;1[}$$

(b) On a :

- $f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{0-1} = -1$
- $f'(0) = \dfrac{-2\mathrm{e}^0}{(-1)^2} = -2$

La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 admet donc pour équation $y = -2(x-0)-1$ soit :

$$\boxed{y = -2x-1}$$

(c) La fonction f étant concave sur $]-\infty\,;1[$, sa courbe représentative est en-dessous de ses tangentes. En particulier $\mathscr{C}$ est en-dessous de T. On a donc, pour tout $x \in]-\infty\,;1[$, $f(x) \leqslant -2x-1$ soit :

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x-1} \leqslant -2x-1$$

Et donc, en multipliant par $x-1$, qui est négatif :

$$\boxed{\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1)}$$

5.(a) Sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. Or $-2 \in]-\infty\,;0[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur $]-\infty\,;1[$.

(b) On a :

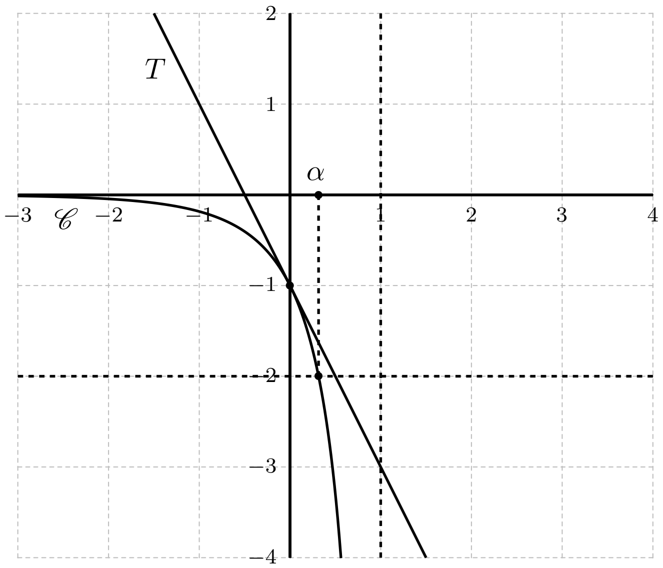
- $f(0{,}31) \approx -1{,}98 > -2$
- $f(0{,}32) \approx -2{,}03 < -2$

On en déduit :

$$\boxed{0{,}31 < \alpha < 0{,}32}$$

Commentaires

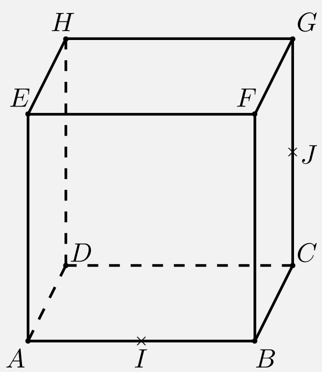
- Dans la question 4a, pour étudier le signe de $x^2 - 4x + 5$, on peut calculer son discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4$. Le discriminant étant strictement négatif, le polynôme n'a pas de racine réelle et est du signe du coefficient de x^2, donc strictement positif, sur $\mathbb{R}$.
- Voici la courbe représentative de la fonction f ainsi que la tangente au point d'abscisse 0, l'asymptote verticale d'équation $x = 1$ et l'abscisse α solution de l'équation $f(x) = -2$.



Exercice 3

Énoncé

Le cube $ABCDEFGH$ a pour arête 1 cm.
Le point I est le milieu du segment $[AB]$ et le point J est le milieu du segment $[CG]$.



On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (FHI) est $-2x - 2y + z + 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EJ).
5. (a) On note K le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI).
   Calculer ses coordonnées.

(b) Montrer que le volume de la pyramide $EFHI$ est $\dfrac{1}{6}$ cm^3.

On pourra utiliser le point L, milieu du segment [EF]. On admet que ce point est le projeté orthogonal du point I sur le plan (EFH).

(c) Déduire des deux questions précédentes l'aire du triangle FHI.

Correction

1. On a :

$$\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{J\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{2}\right)}$$

2. On a $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$. On a alors :

- $\overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{FH} = 1\times(-1)+1\times 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\times 0 = -1+1 = 0$
- $\overrightarrow{EJ}.\overrightarrow{FI} = 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times 0+\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-1) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHI). On en déduit que :

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{EJ} \text{ est normal au plan } (FHI)}$$

3. D'après la question précédente, le plan (FHI) admet une équation cartésienne de la forme :

$$-2x-2y+z+d=0 \quad \text{avec } d\in\mathbb{R}$$

De plus, le point $F(1\,;\,0\,;\,1)$ appartient au plan donc ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $-2-0+1+d=0$ soit $d=1$. Le plan (FHI) admet donc pour équation cartésienne :

$$\boxed{-2x-2y+z+1=0}$$

4. La droite (EJ) passe par le point $E(0\,;\,0\,;\,1)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{EJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-\dfrac{1}{2}t\end{cases}} \quad t\in\mathbb{R}$$

5.(a) Il s'agit de déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (EJ) et du plan (FHI). On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de (EJ) dans l'équation cartésienne du plan (FHI) :

$$\begin{aligned}-2t-2t+1-\frac{1}{2}t+1=0 &\iff -\frac{9}{2}t=-2\\ &\iff t=2\times\frac{2}{9}\\ &\iff t=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

Le point K est donc le point de paramètre $t = \dfrac{4}{9}$ dans la représentation paramétrique de la droite (EJ), soit :

$$\boxed{K\left(\frac{4}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{7}{9}\right)}$$

(b) Soit $L\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$ le milieu du segment $[EF]$, projeté orthogonal du point I sur le plan (EFH). Soit $\mathscr{A}_{EFH}$ l'aire du triangle rectangle EFH, on a :

$$\mathscr{A}_{EFH} = \frac{EF \times EH}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

En choisissant le triangle EFH comme base, la hauteur correspondante est la longueur IL, le volume $\mathscr{V}_{EFHI}$ de la pyramide $EFHI$ est alors égal à :

$$\mathscr{V}_{EFHI} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{EFH} \times IL = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$$

Le volume de la pyramide $EFHI$ est donc, en cm^3 :

$$\boxed{\mathscr{V}_{EFHI} = \frac{1}{6}}$$

(c) D'autre part, on peut exprimer le volume de la pyramide $EFHI$ en choisissant le triangle FHI pour base. La hauteur correspondante est alors la longueur EK. Or :

$$\begin{aligned} EK &= \sqrt{\left(\frac{4}{9}-0\right)^2 + \left(\frac{4}{9}-0\right)^2 + \left(\frac{7}{9}-1\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81}} \\ &= \sqrt{\frac{36}{81}} \\ &= \frac{6}{9} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

On a alors, en notant $\mathscr{A}_{FHI}$ l'aire du triangle FHI :

$$\mathscr{V}_{EFHI} = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{FHI} \times EK = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{FHI} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}\mathscr{A}_{FHI}$$

On en déduit l'égalité :

$$\frac{2}{9}\mathscr{A}_{FHI} = \frac{1}{6}$$

Soit $\mathscr{A}_{FHI} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{9}{2}$ et donc l'aire du triangle FHI, en cm^3, est :

$$\boxed{\mathscr{A}_{FHI} = \frac{3}{4}}$$

Commentaires

- Dans la question 5, on utilise le fait que l'on peut exprimer le volume d'un tétraèdre de deux façon différentes afin d'en déduire une aire. C'est un raisonnement classique que l'on retrouve souvent dans les sujets de bac.

Exercice 4

Énoncé

Partie A
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$.
On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Partie B
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. On considère le script Python ci-dessous :

```
from math import *
def seuil(n):
    u=5
    i=0
    l=(1+sqrt(5))/2
    while abs(u-l)>=10**(-n):
        u=sqrt(u+1)
        i=i+1
    return(i)
```

On rappelle que la commande `abs(x)` *renvoie la valeur absolue de* `x`.

(a) Donner la valeur renvoyée par `seuil(2)`.

(b) La valeur renvoyée par `seuil(4)` est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Correction
Partie A

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est croissante sur l'intervalle } [0\,;\,+\infty[}$$

2. Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x)-x &= \sqrt{x+1}-x \\ &= \frac{(\sqrt{x+1}-x)(\sqrt{x+1}+x)}{\sqrt{x+1}+x} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x+1}+x} \\ &= \frac{x+1-x^2}{\sqrt{x+1}+x} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f(x)-x = \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}}$$

3. Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x)=x &\Longleftrightarrow f(x)-x=0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}=0 \\ &\Longleftrightarrow -x^2+x+1=0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré qui admet pour discriminant $\Delta = 5$ et qui a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2}$$

Soit :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Or x_2 n'appartient pas à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ donc l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$\boxed{\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Partie B

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
   - **Initialisation :**
     Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = f(5) = \sqrt{6} \approx 2{,}45$. On a donc bien $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. La propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - **Hérédité :**
     Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

     $$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

     On a, en appliquant la fonction f, qui est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$:

     $$f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$$

     Soit :

     $$\sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

     Et donc, a fortiori :

     $$1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

     La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion :**
  La propriété est vraie au rang $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$$

2. D'après la question précedente, la suite (u_n) est :
   - décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
   - minorée par 1 (car $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

   On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

3. La suite (u_n) est définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

   Or on a vu, dans la question précédente, que cette suite converge vers une limite l. Et comme la fonction f est continue sur $[0\,;\,+\infty[$, par passage à la limite dans la relation précédente, on a :

$$l = f(l)$$

   Autrement dit, l est solution de l'équation $f(x) = x$. Et d'après la question 3 de la partie A, cette équation admet pour unique solution $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit donc que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

4.(a) La commande `seuil(2)` renvoie le premier indice à partir duquel l'écart entre u_n et ℓ est strictement inférieur à 10^{-2}. On obtient, à l'aide de la calculatrice :
   - $u_4 - \ell \approx 0{,}022 > 0{,}01$
   - $u_5 - \ell \approx 0{,}007 < 0{,}01$

   C'est donc à partir de $n = 5$ que $|u_n - \ell| < 0{,}02$. La valeur renvoyée par `seuil(2)` est donc :

$$\boxed{5}$$

(b) Cela signifie que c'est à partir de u_9 que l'écart entre les termes de la suite et sa limite devient strictement plus petit que 10^{-4}. Autrement dit :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 9,\ |u_n - \ell| < 0{,}0001}$$

Commentaires

- Dans la question 1, on aurait également pu dire que la fonction f était croissante comme composée de fonctions croissantes. En effet f est la composée des fonctions $x \mapsto x + 1$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ et ces deux fonctions sont croissantes.
- Dans la question 4a de la partie B, on n'est pas obligé de justifié. On peut programmer le script à l'aide de la calculatrice et répondre simplement « En programmant le script, on obtient que la commande 5 renvoie la valeur 5 ».