ANNÉE 2024 - SUJET CORRIGÉ 3

CENTRES ÉTRANGERS - 5 JUIN 2024

Exercice 1

Énoncé

Partie A

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03}$$

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$,

$$f'(x) = \frac{0{,}0288}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie B

La lutte contre le dopage passe notamment par la réalisation de contrôles antidopage qui visent à déterminer si un sportif a fait usage de substances interdites.
Lors d'une compétition rassemblant 1 000 sportifs, une équipe médicale teste tous les concurrents. On propose d'étudier la fiabilité de ce test.

On appelle x le réel compris entre 0 et 1 qui désigne la proportion de sportifs dopés.

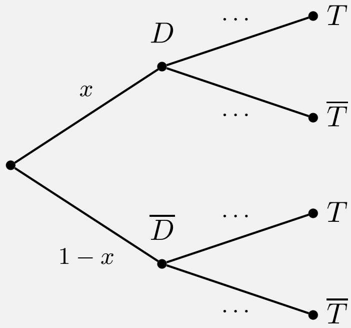
Lors de l'élaboration de ce test, on a pu déterminer que :

- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à 0,96 ;
- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il n'est pas dopé est égale à 0,03.

On note :

- D l'événement : « le sportif est dopé ».
- T l'événement : « le test est positif ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Déterminer, en fonction de x, la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif.
3. Démontrer que la probabilité de l'événement T est égale à $0{,}93x + 0{,}03$.
4. Pour cette question uniquement, on suppose qu'il y a 50 sportifs dopés parmi les 1 000 testés. La fonction f désigne la fonction définie à la **partie A**.
   Démontrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est égale à $f(0{,}05)$. En donner une valeure arrondie au centième.
5. On appelle valeur prédictive positive d'un test la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.
   (a) Déterminer à partir de quelle valeur de x la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à 0,9. *Arrondir le résultat au centième.*
   (b) Un responsable de la compétition décide de ne plus tester l'ensemble des sportifs, mais de cibler les sportifs les plus performants supposés être plus fréquemment dopés.
   Quelle est la conséquence de cette décision sur la valeur prédictive positive du test ? *Argumenter en utilisant un résultat de la **partie A**.*

Correction
Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,1]$, et pour tout $x \in [0\,;\,1]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{0{,}96(0{,}93x+0{,}03) - 0{,}96x \times 0{,}93}{(0{,}93x+0{,}03)^2} \\ &= \frac{0{,}8928x + 0{,}0288 - 0{,}8928x}{(0{,}93x+0{,}03)^2} \\ &= \frac{0{,}0288}{(0{,}93x+0{,}03)^2} \end{aligned}$$

Soit :

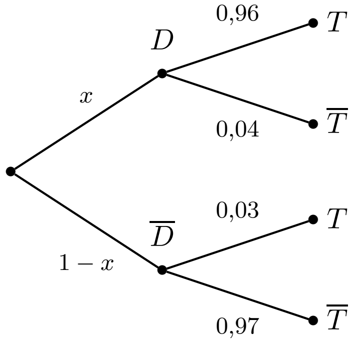
$$\boxed{f'(x) = \frac{0{,}0288}{(0{,}93x+0{,}03)^2}}$$

2. Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $(0{,}93x + 0{,}03)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [0\,;\,1]}$$

Partie B

1. On peut compléter l'arbre de la façon suivante :



2. Il s'agit de calculer $P(D \cap T)$:

$$\begin{aligned} P(D \cap T) &= P(D) \times P_D(T) \\ &= x \times 0{,}96 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif est donc :

$$\boxed{P(D \cap T) = 0{,}96x}$$

3. Les événements D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers. On a donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(D) \times P_D(T) + P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) \\ &= x \times 0{,}96 + (1-x) \times 0{,}03 \\ &= 0{,}96x + 0{,}03 - 0{,}03x \\ &= 0{,}93x + 0{,}03 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{P(T) = 0{,}93x + 0{,}03}$$

4. Il s'agit de calculer $P_T(D)$:

$$\begin{aligned} P_T(D) &= \frac{P(D \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

La probabilité que le sportif soit dopé sachant que le test est positif est donc égale à $f(x)$. Et comme il y a 50 sportifs dopés parmi les 1 000 testés, on a $x = \dfrac{50}{1\,000} = 0{,}05$. La probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est :

$$\boxed{P_T(D) = f(0{,}05) \approx 0{,}63}$$

5. (a) La valeur prédictive positive du test est égale à $P_T(D)$ et, d'après la question précédente, $P_T(D) = \dfrac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03}$. On a alors :

$$\begin{aligned} P_T(D) \geqslant 0{,}9 &\iff \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03} \geqslant 0{,}9 \\ &\iff 0{,}96x \geqslant 0{,}9(0{,}93x + 0{,}03) \\ &\iff 0{,}96x \geqslant 0{,}837x + 0{,}027 \\ &\iff 0{,}123x \geqslant 0{,}027 \\ &\iff x \geqslant \frac{0{,}027}{0{,}123} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{0{,}027}{0{,}123} \approx 0{,}22$ la valeur de x à partir de laquelle la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à 0,9 est :

$$\boxed{x \approx 0{,}22}$$

(b) D'après la question précédente, pour une proportion x de sportifs dopés, la valeur prédictive positive du test est :

$$P_T(D) = f(x)$$

En ne ciblant que les sportifs supposés être plus fréquemment dopés, la proportion x augmente. Or, d'après la partie A, la fonction f est croissante donc une conséquence de cette décision est que :

$$\boxed{\text{La valeur prédictive positive du test va augmenter}}$$

Commentaires

- La valeur prédictive positive du test est donc la probabilité qu'un sportif soit réellement dopé sachant que son test est positif. De la même façon, on définit la valeur prédictive négative comme la probabilité que le sportif ne soit pas dopé sachant que son test est négatif.

Exercice 2

Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1.(a) Résoudre sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.
(b) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
(c) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

2.(a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.
(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

4.(a) Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.
(b) On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.
Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```python
def seuil() :
    n=0
    u=0.1
    while ln(2) - u ... 0.0001 :
        n=n+1
        u=...
    return (u,n)
```

(c) Donner la valeur de la variable `n` renvoyée par la fonction `seuil()`.

Correction

1.(a) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\iff 2x\mathrm{e}^{-x} = x \\
&\iff 2x\mathrm{e}^{-x} - x = 0 \\
&\iff x\left(2\mathrm{e}^{-x} - 1\right) = 0 \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\mathrm{e}^{-x} = 1 \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{2} \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \ln(2)
\end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\,;\,\ln(2)\}}$$

(b) La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et, pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times \mathrm{e}^{-x} + 2x \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (2-2x)\mathrm{e}^{-x} \\ &= 2(1-x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}}$$

(c) Pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a $2 > 0$, $(1-x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$. On en déduit le tableau :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$

2.(a) Montrons par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0{,}1$ et $u_1 = f(0{,}1) = 0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}1} \approx 0{,}18$. On a donc bien $0 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 1$.
- **Hérédité :**
  Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

  $$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$$

  On a alors, en appliquant la fonction f qui est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$:

  $$f(0) \leqslant f(u_n) < f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$$

  Soit :

  $$0 \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 2\mathrm{e}^{-1}$$

  Or $2\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}74 < 1$ donc, a fortiori :

  $$0 \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 1$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$\boxed{0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1}$$

(b) D'après la question précédente, la suite (u_n) est :

- croissante (car $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)
- majorée par 1 (car $u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$

3. D'après la question précédente, la suite (u_n) converge, notons ℓ sa limite. La fonction f étant continue sur $[0\,;\,1]$, on a alors, par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$\ell = f(\ell)$$

Autrement dit ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$. Or on a vu, dans la question 1a, que l'équation $f(x) = x$ admettait deux solution sur $[0\,;\,1]$: 0 et $\ln(2)$. Enfin, la suite (u_n) est croissante et $u_0 = 0{,}1$ donc la suite (u_n) ne peut pas converger vers 0. On en déduit que la limite de la suite (u_n) est :

$$\boxed{\ell = \ln(2)}$$

4.(a) La suite (u_n) est croissante et converge vers $\ln(2)$, elle est donc majorée par $\ln(2)$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln(2)$, ou encore :

$$\boxed{\ln(2) - u_n \geqslant 0}$$

(b) On peut compléter le script de la façon suivante :

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.1
    while log(2) - u > 0.0001 :
        n = n+1
        u = 2*u*exp(-u)
    return (u,n)
```

(c) En programmant ce script sur la calculatrice, on obtient le résultat `(0.6931009075876846, 11)`. La valeur de la variable n est donc :

$$\boxed{n = 11}$$

Commentaires

- Dans la question 1a, on utilise le fait que :

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

- le maximum de la fonction f, $2\mathrm{e}^{-1}$ (atteint en 1) peut également s'écrire $\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.
- Dans la question 4a, on aurait également pu montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln(2)$.
- Dans la question 4b, il y a une erreur d'énoncé. En effet, la fonction `ln` n'existe pas en Python, il faut utiliser la fonction `log` (qui renvoie le logarithme népérien). De plus, il faut importer les fonction `log` et `exp` à l'aide des commande « `from math import log` » et « `from math import exp` », ou encore plus simplement « `from math import *` ».
- Dans la question 4c, on aurait également pu calculer à l'aide de la calculatrice, les termes de la suite (u_n) ainsi que ceux de la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \ln(2) - u_n$ et constater que :

  → $v_{10} \approx 0{,}00015 > 0{,}0001$

  → $v_{11} \approx 0{,}00005 < 0{,}0001$

  C'est donc bien à partir de $n = 11$ que $\ln(2) - u_n \leqslant 0{,}0001$.

Exercice 3

Énoncé

On considère l'équation différentielle (E_0) : $y' = y$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x))\,\mathrm{d}x.$$

Correction

1. Soit f une fonction constante, il existe donc un réel k tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$. La fonction f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$. La fonction f est alors solution de (E_0) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$, soit $0 = k$. On en déduit que :
$$\boxed{f \text{ est la fonction nulle}}$$
2. L'équation différentielle (E_0) est de la forme $y' = ay$ avec $a = 1$, les solutions sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$ soit les fonctions :
$$\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^x} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$
3. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$$
Et d'autre part :
$$\begin{aligned} h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) &= 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x) \\ &= \cos(x) - 2\sin(x) \end{aligned}$$
On a donc $h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc :
$$\boxed{h \text{ est solution de l'équation différentielle } (E)}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - h'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - h'(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - h'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \left(h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)\right) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - h'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - h(x) + \cos(x) + 3\sin(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x) \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, (f-h)'(x) = (f-h)(x) \\
&\iff f - h \text{ est solution de } (E_0)
\end{aligned}$$

On a donc montré l'équivalence :

$$\boxed{f \text{ est solution de } (E) \iff f - h \text{ est solution de } (E_0)}$$

5. D'après la question précédente, f est une solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0), c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel C tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f-h)(x) = C\mathrm{e}^x$, soit $f(x) = C\mathrm{e}^x + h(x)$. Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme :

$$\boxed{x \mapsto C\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

6. Soit g une solution de (E), il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = C\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
g(0) = 0 &\iff C\mathrm{e}^0 + 2\cos(0) + \sin(0) = 0 \\
&\iff C + 2 = 0 \\
&\iff C = -2
\end{aligned}$$

L'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$ est donc la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\boxed{g(x) = -2\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)}$$

7. Notons I l'intégrale demandée, on a :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \Big[-2\mathrm{e}^x - \cos(x) + 2\sin(x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(-2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(-2\mathrm{e}^0 - \cos(0) + 2\sin(0)\right) \\
&= \left(-2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 2\right) - (-2 - 1) \\
&= -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 2 + 3
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right) \mathrm{d}x = 5 - 2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}$$

Commentaires

- Dans les questions 4 et 5,on a démontré que les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions qui s'écrivent comme la somme des solutions de l'équation homogène associée et d'une solution particulière. Ce résultat peut parfois être considéré comme une propriété du cours.

Exercice 4

Énoncé

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k})$.

On considère :

- les points $A(-2\,;\,0\,;\,2)$, $B(-1\,;\,3\,;\,0)$, $C(1\,;\,-1\,;\,2)$ et $D(0\,;\,0\,;\,3)$.
- la droite $\mathscr{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3+5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
- la droite $\mathscr{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1+3s \\ y = -1-5s \\ z = 2-6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2.(a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

(b) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x + 3y + 5z - 8 = 0$$

(c) En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3.(a) Justifier que la droite $\mathscr{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D.
On admet que la droite $\mathscr{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de C.

(b) Démontrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4.(a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

(b) Calculer la distance du point D au plan (ABC). *Arrondir le résultat au centième.*

Correction

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles) donc :

$$\boxed{\text{Les points } A,\ B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$$

2.(a) On a :

- $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 1\times1+3\times3+5\times(-2) = 1+9-10 = 0$
- $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 1\times3+3\times(-1)+5\times0 = 3-3 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), on en déduit que :

$$\boxed{\text{Le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est orthogonal au plan } (ABC)}$$

(b) Le plan (ABC) admet le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ pour vecteur normal, il admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$x + 3y + 5z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

De plus, le point $A(-2\,;\,0\,;\,2)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation. On a donc $-2+3\times 0+5\times 2+d = 0$ soit $d = -8$. On en déduit que le plan (ABC) admet l'équation cartésienne :

$$\boxed{x + 3y + 5z - 8 = 0}$$

(c) Les coordonnées du point D ne vérifient pas l'équation du plan (ABC). En effet $0+3\times 0+5\times 3-8 = 7 \neq 0$. On en déduit que le point D n'appartient pas au plan (ABC) et donc que :

$$\boxed{\text{Les points } A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ ne sont pas coplanaires}}$$

3.(a) Il s'agit de vérifier que la droite $\mathscr{D}_1$ passe par D et est orthogonale au plan (ABC).

- D'après sa représentation paramétrique, la droite $\mathscr{D}_1$ est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$. Or ce vecteur est le vecteur $\overrightarrow{n}$, qui est normal au plan (ABC) donc la droite $\mathscr{D}_1$ est orthogonale au plan (ABC).
- Le point D appartient à la droite $\mathscr{D}_1$, en effet c'est le point de paramètre $t = 0$ dans la représentation paramétrique.

Finalement :

$$\boxed{\mathscr{D}_1 \text{ est la hauteur du tétraèdre } ABCD \text{ issue de } D}$$

(b) Résolvons le système obtenu à l'aide des représentations paramétriques de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} t = 1+3s \\ 3t = -1-5s \\ 3+5t = 2-6s \end{cases}
&\iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 3(1+3s) = -1-5s \\ 3+5(1+3s) = 2-6s \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 3+9s = -1-5s \\ 3+5+15s = 2-6s \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} t = 1+3s \\ 14s = -4 \\ 21s = -6 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} t = 1+3\times\left(-\dfrac{2}{7}\right) \\ s = -\dfrac{2}{7} \\ s = -\dfrac{2}{7} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} t = \dfrac{1}{7} \\ s = -\dfrac{2}{7} \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système admet un unique couple solution donc les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes. Leur point d'intersection est le point de paramètre $t = \dfrac{1}{7}$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ et $s = -\dfrac{2}{7}$ dans celle de $\mathscr{D}_2$, c'est-à-dire le point de coordonnées :

$$\boxed{\left(\frac{1}{7}\,;\,\frac{3}{7}\,;\,\frac{26}{7}\right)}$$

4. (a)

(b) Il s'agit de déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite $\mathscr{D}_1$ et du plan (ABC). On injecte les coordonnées de la représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ dans l'équation cartésienne du plan (ABC) :

$$\begin{aligned} t + 3\times 3t + 5(3+5t) - 8 = 0 &\iff t + 9t + 15 + 25t - 8 = 0 \\ &\iff 35t = -7 \\ &\iff t = -\frac{7}{35} \\ &\iff t = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Le point H est donc le point de paramètre $t = -\dfrac{1}{5}$ dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$, soit :

$$\boxed{H\left(-\frac{1}{5}\,;\,-\frac{3}{5}\,;\,2\right)}$$

(c) Le point H étant le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC), la distance cherchée est la longueur DH.

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{\left(-\frac{1}{5}-0\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}-0\right)^2 + (2-3)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{35}{25}} \\ &= \frac{\sqrt{35}}{5} \end{aligned}$$

La distance du point D au plan (ABC) est donc :

$$\boxed{DH = \frac{\sqrt{35}}{5} \approx 1{,}18}$$

Commentaires

- Dans la question 2b, l'équation du plan étant donné dans l'énoncé, on peut aussi simplement vérifier que les coordonnées de chacun des points A, B et C vérifient cette équation.
- Dans la question 3b, afin de déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux droites, après avoir déterminer les valeurs de t et s, il suffit de remplacer t par sa valeur dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$ ou s par sa valeur dans celle de $\mathscr{D}_2$.