ANNÉE 2024 - SUJET CORRIGÉ 2

AMÉRIQUE DU NORD - 22 MAI 2024

Exercice 1

Énoncé

Les données publiées le 1er mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- 22,86 % des véhicules étaient des véhicules neufs ;
- 8,08 % des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables ;
- 1,27 % des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Partie A

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.
On note :

- N l'événement « le véhicule est neuf » ;
- R l'événement « le véhicule est hybride rechargeable » ;
- $\overline{N}$ et $\overline{R}$ les événements contraires des événements N et R.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.
3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est 0,0283.
4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

Partie B

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022. Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.
On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.
3. Déterminer la probabilité $p(X \geqslant 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

On choisit désormais n véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.

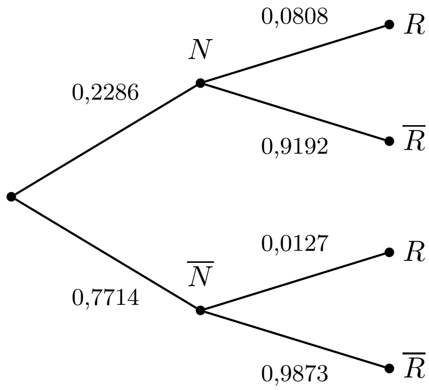
On assimile le choix de ces n véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n que tous ces véhicules soient d'occasion.
2. On note q_n la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf. En résolvant une inéquation, déterminer la plus petite valeur de n telle que $q_n \geqslant 0{,}9999$.

Correction

Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



2. Il s'agit de calculer $P(N \cap R)$:

$$\begin{aligned} P(N \cap R) &= P(N) \times P_N(R) \\ &= 0{,}2286 \times 0{,}0808 \\ &\approx 0{,}0185 \end{aligned}$$

La probabilité que le véhicule soit neuf et hybride rechargeable est donc :

$$\boxed{P(N \cap R) \approx 0{,}0185}$$

3. Il s'agit de calculer $P(R)$. Les événements N et $\overline{N}$ forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(N) \times P_N(R) + P(\overline{N}) \times P_{\overline{N}}(R) \\ &= 0{,}2286 \times 0{,}0808 + 0{,}7714 \times 0{,}0127 \\ &\approx 0{,}0283 \end{aligned}$$

La probabilité que le véhicule soit hybride rechargeable est donc :

$$\boxed{P(R) \approx 0{,}0283}$$

4. Il s'agit de calculer $P_R(N)$:

$$\begin{aligned} P_R(N) &= \frac{P(N \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{0{,}2286 \times 0{,}0808}{0{,}2286 \times 0{,}0808 + 0{,}7714 \times 0{,}0127} \\ &\approx 0{,}6534 \end{aligned}$$

La probabilité que le véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable est donc :

$$\boxed{P_R(N) \approx 0{,}6534}$$

Partie B

1. On répète 500 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est égale à 0,65. La variable aléatoire X est égale au nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 500 \text{ et } p = 0{,}65}$$

2. Il s'agit de calculer $P(X = 325)$. On obtient, à l'aide de la calculatrice, que la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs est :

$$\boxed{P(X = 325) \approx 0{,}0374}$$

3. On obtient, à l'aide de la calculatrice :

$$\boxed{P(X \geqslant 325) \approx 0{,}5206}$$

Cela signifie qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins 325 véhicules soient neufs.

Partie C

1. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de véhicule neufs parmi les n véhicules. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}65$. L'événement « tous les véhicules sont d'occasion » correspond à l'événement $Y = 0$. Or :

$$P(Y = 0) = \binom{n}{0} \times 0{,}65^0 \times (1 - 0{,}65)^{n-0}$$

Soit :

$$\boxed{p_n = 0{,}35^n}$$

2. L'événement « au moins un des véhicule est neuf » est lévénement contraire de l'événement « tous les véhicules sont d'occasion », on a donc $q_n = 1 - p_n$, soit :

$$q_n = 1 - 0{,}35^n$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
q_n \geqslant 0{,}9999 &\iff 1 - 0{,}35^n \geqslant 0{,}9999 \\
&\iff -0{,}35^n \geqslant -0{,}0001 \\
&\iff 0{,}35^n \leqslant 0{,}0001 \\
&\iff \ln\left(0{,}35^n\right) \leqslant \ln(0{,}0001) \\
&\iff n \ln(0{,}35) \leqslant \ln(0{,}0001) \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}35)} \qquad \textit{(car } \ln(0{,}35) < 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}0001)}{\ln(0{,}35)} \approx 8{,}77$ donc la plus petite valeur de n telle que $q_n \geqslant 0{,}9999$ est :

$$\boxed{n = 9}$$

Commentaires

- Dans la question 4 de la partie A, pour le calcul de $P_R(N)$, il vaut mieux prendre les valeurs exactes des probabilités $P(N \cap R)$ et $P(R)$. Si l'on prend les valeurs approchées obtenues dans les questions précédentes alors on obtient $P_R(N) \approx 0{,}6537$ au lieu de 0,6534.
- Dans la question 2 de la partie B, on peut également utiliser la formule :

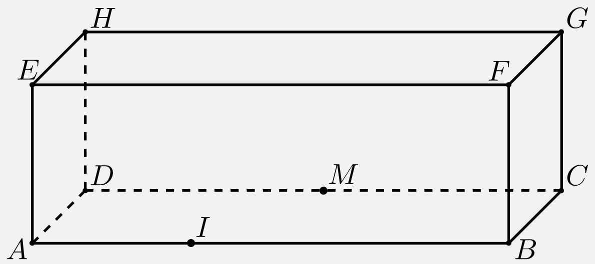
$$P(X = 325) = \binom{500}{325} \times 0{,}65^{325} \times (1 - 0{,}65)^{500-325}$$

- Dans la partie C, plutôt que d'introduire une variable aléatoire qui compte le nombre de véhicules neufs, on aurait pu introduire une variable aléatoire Z qui compte le nombre de véhicules d'occasion. Z suit alors une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}35$.

Exercice 2

Énoncé

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-dessous.



On considère le point I du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment $[CD]$.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\,\overrightarrow{AI}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

2.(a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

(b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :

$$2x + 6y + 3z - 9 = 0$$

(c) Le plan $\mathscr{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

3. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).
Déterminer les coordonnées du point N.

4. Le point R de coordonnées $\left(3\,;\,\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF) ? Justifier la réponse.

Correction

1. On a :

$$\boxed{F(3\,;\,0\,;\,1)} \qquad \boxed{H(0\,;\,1\,;\,1)} \qquad \boxed{M\left(\frac{3}{2}\,;\,1\,;\,0\right)}$$

2.(a) On a $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et donc :

- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{HM} = 2\times\frac{3}{2}+6\times 0+3\times(-1) = 3+0-3 = 0$
- $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{HF} = 2\times 3+6\times(-1)+3\times 0 = 6-6+0 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF), on en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal au plan } (HMF)}$$

(b) On en déduit que le plan (HMF) admet une équation cartésienne de la forme :

$$2x+6y+3z+d=0 \quad \text{avec } d\in\mathbb{R}$$

De plus, le point $H(0\,;\,1\,;\,1)$ appartient au plan (HMF) donc ses coordonnées vérifient l'équation, soit $2\times 0+6\times 1+3\times 1+d=0$ et donc $d=-9$. Une équation cartésienne du plan (HMF) est donc :

$$\boxed{2x+6y+3z-9=0}$$

(c) D'après son équation cartésienne, le plan $\mathscr{P}$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}5\\15\\-3\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires donc :

$$\boxed{\text{Les plans } \mathscr{P} \text{ et } (HMF) \text{ ne sont pas parallèles}}$$

3. La droite (DG) admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

On injecte les expressions de la représentation paramétrique dans l'équation cartésienne du plan (HMF) :

$$\begin{aligned} 2\times 3t+6\times 1+3\times t-9=0 &\iff 6t+6+3t-9=0 \\ &\iff 9t=3 \\ &\iff t=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Le point N est donc le point de paramètre $t=\dfrac{1}{3}$ dans la représentation paramétrique de la droite (DG), soit :

$$\boxed{N\left(1\,;\,1\,;\,\frac{1}{3}\right)}$$

4. On a $\overrightarrow{RG}\begin{pmatrix}0\\3/4\\1/2\end{pmatrix}$ donc le vecteur $\overrightarrow{RG}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$. On en déduit que $\overrightarrow{RG}$ n'est pas orthogonal au plan (HMF) et donc que :

$$\boxed{R \text{ n'est pas le projeté orthogonal de } G \text{ sur le plan } (HMF)}$$

Commentaires

- Dans la question 4, on aurait pu chercher à déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de G sur le plan (HMF). On utilise pour cela une représentation paramétrique de la droite Δ passant par G et orthogonale au plan (HMF) :

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 6t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

On injecte dans l'équation cartésienne de (HMF) :

$$2(3 + 2t) + 6(1 + 6t) + 3(1 + 3t) - 9 = 0$$

Soit :

$$6 + 4t + 6 + 36t + 3 + 9t - 9 = 0$$

D'où :

$$49t = -6$$

Et donc :

$$t = -\frac{6}{49}$$

Le projeté orthogonal de G sur le plan (HMF) est donc le point de coordonnées :

$$\left(\frac{135}{49}\,;\,\frac{13}{49}\,;\,\frac{31}{49}\right)$$

Ce n'est donc pas le point G.

Exercice 3

Énoncé

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $g(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Déterminer la limite l de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.
7. En déduire une expression de v_n en fonction de n.
8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.

9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u<0.95 :
        n=...
        u=...
    return n
```

Correction

1. La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et pour tout $x \in [0\,;\,1]$:

$$g'(x) = 2 - 2x = 2(1-x)$$

Pour tout $x \in [0\,;\,1[$, on a $g'(x) > 0$ donc :

$$\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0\,;\,1]}$$

Et on a :

$$\boxed{g(0) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{g(1) = 1}$$

2. On a :

- $u_1 = g(u_0) = g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \times \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$
- $u_2 = g(u_1) = g\left(\dfrac{3}{4}\right) = 2 \times \dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{9}{16} = \dfrac{15}{16}$

Soit :

$$\boxed{u_1 = \frac{3}{4}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_2 = \frac{15}{16}}$$

3. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

- **Initialisation :**
Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0{,}5$ et $u_1 = 0{,}75$. On a donc bien :

$$0 < 0{,}5 < 0{,}75 < 1$$

La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.
- **Hérédité :**
Supposons la propriété vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $0 < u_n < u_{n+1} < 1$. On a alors, en appliquant la fonction g qui est strictement croissante sur $[0\,;\,1]$:

$$g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1)$$

Soit :

$$0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion :**
La propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. D'après la question précédente, la suite (u_n) est :

- croissante (car $u_n < u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

- majorée par 1 (car $u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$)

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente}}$$

5. La fonction g étant continue sur $[0\,;\,1]$, on sait que la limite l est un point fixe de g, c'est-à-dire une solution de l'équation $g(x) = x$. Résolvons cette équation, soit $x \in [0\,;\,1]$:

$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff 2x - x^2 = x \\ &\iff x - x^2 = 0 \\ &\iff x(1-x) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \end{aligned}$$

Or $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et la suite (u_n) est croissante, elle ne peut donc pas converger vers 0. On en déduit que :

$$\boxed{l = 1}$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(1 - u_{n+1}) \\ &= \ln(1 - g(u_n)) \\ &= \ln(1 - 2u_n + u_n^2) \\ &= \ln\left((1-u_n)^2\right) \\ &= 2\ln(1-u_n) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

Et comme $v_0 = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison 2 et de } 1^{\text{er}} \text{ terme } v_0 = -\ln(2)}$$

7. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n$, soit :

$$\boxed{v_n = -\ln(2) \times 2^n}$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \ln(1 - u_n)$ donc, en appliquant la fonction exponentielle :

$$\mathrm{e}^{v_n} = 1 - u_n$$

Et donc :

$$u_n = 1 - \mathrm{e}^{v_n}$$

Soit :

$$\boxed{u_n = 1 - \mathrm{e}^{-\ln(2)\times 2^n}}$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\ln(2) \times 2^n\right) = -\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\ln(2)\times 2^n}\right) = 0$ d'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

9. On peut compléter le script de la façon suivante :

```python
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.5
    while u < 0.95 :
        n = n+1
        u = 2*u - u**2
    return n
```

Commentaires

- Dans la question 4, on montre que la suite converge mais on ne connaît pas la valeur de la limite.
- Dans la question 8, on peut obtenir une écriture différente de l'expression de u_n, en effet on a :

$$\mathrm{e}^{-\ln(2)\times 2^n} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\times 2^n} = \left(\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

Et donc :

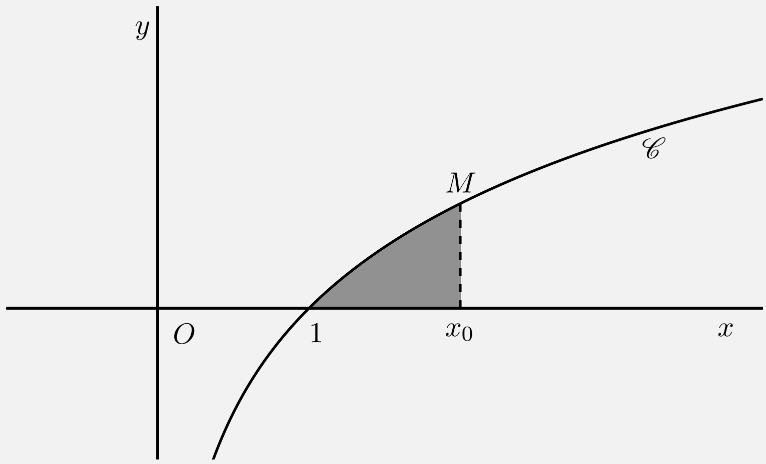
$$\boxed{u_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

Exercice 4

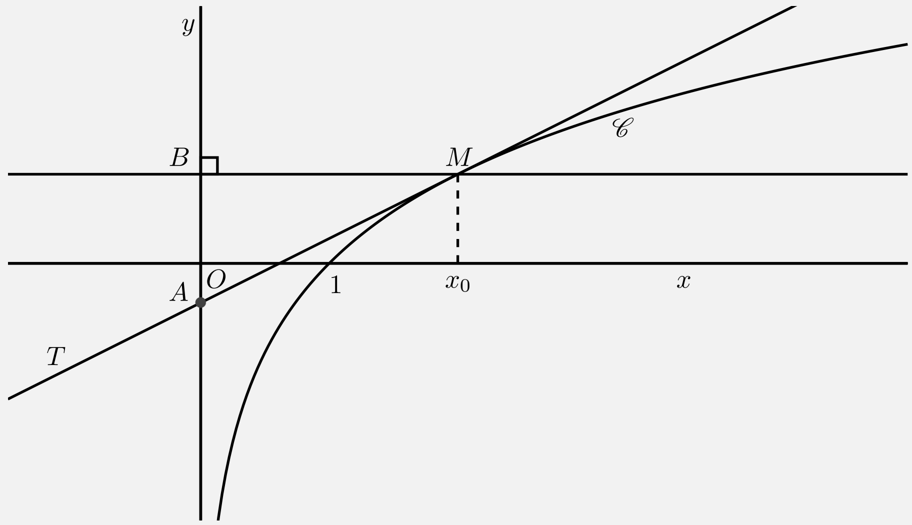
Énoncé

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a\ln(x)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a\,(x\ln(x) - x)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire l'aire du domaine grisé en fonction de a et de x_0.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera. *Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.*

Correction

1. Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 0$. Soit $x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff a\ln(x) = 0 \\ &\iff \ln(x) = 0 \quad (\text{car } a \neq 0) \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

L'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses est donc :

$$\boxed{x = 1}$$

2. La fonction F est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= a\left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1\right) \\ &= a\left(\ln(x) + 1 - 1\right) \\ &= a\ln(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur }]0\,;+\infty[}$$

3. Il s'agit de calculer l'intégrale entre 1 et x_0 de la fonction f :

$$\begin{aligned} \int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^{x_0} a\ln(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[a(x\ln(x) - x)\Big]_1^{x_0} \\ &= a(x_0\ln(x_0) - x_0) - a(1 \times \ln(1) - 1) \\ &= a(x_0\ln(x_0) - x_0) + a \\ &= a(x_0\ln(x_0) - x_0 + 1) \end{aligned}$$

L'aire du domaine grisé est donc :

$$\boxed{\mathscr{A} = a(x_0\ln(x_0) - x_0 + 1)}$$

4. Déterminons l'équation réduite de la tangente T. La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{a}{x}$.
   - $f(x_0) = a\ln(x_0)$
   - $f'(x_0) = \dfrac{a}{x_0}$

   La tangente T admet donc pour équation :
   $$y = \frac{a}{x_0}(x - x_0) + a\ln(x_0)$$
   Soit :
   $$y = \frac{a}{x_0}x - a + a\ln(x_0)$$
   L'ordonnée à l'origine est donc $-a+a\ln(x_0)$, il s'agit de l'ordonnée du point A. Et comme l'ordonnée du point B est $a\ln(x_0)$, on a :
   $$\begin{aligned} AB &= y_B - y_A \\ &= a\ln(x_0) - (-a + a\ln(x_0)) \\ &= a\ln(x_0) + a - a\ln(x_0) \\ &= a \end{aligned}$$
   La longueur AB est donc égale à une constante. Plus précisément :
   $$\boxed{AB = a}$$

Commentaires

- La formule donnant la distance entre deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ du plan est :
  $$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
  Mais dans cet exercice les points A et B ont la même abscisse, on a donc $AB = |y_B - y_A|$.