Amérique du nord - 21 mai 2024

Spécialité mathématiques - Baccalauréat

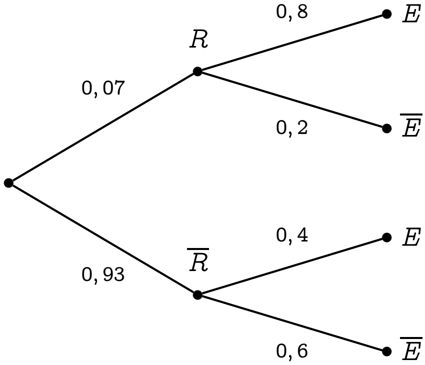
Exercice 1 - Partie A

Exercice 1 - Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :

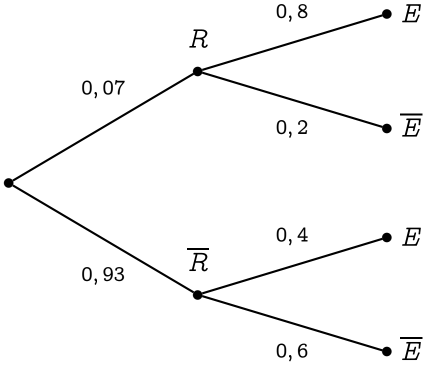
Exercice 1 - Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Exercice 1 - Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :

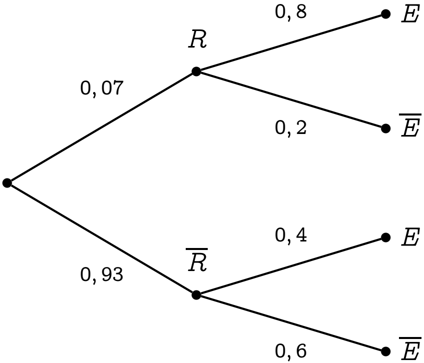


Et on a :

$$P(R \cap E) =$$

Exercice 1 - Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :

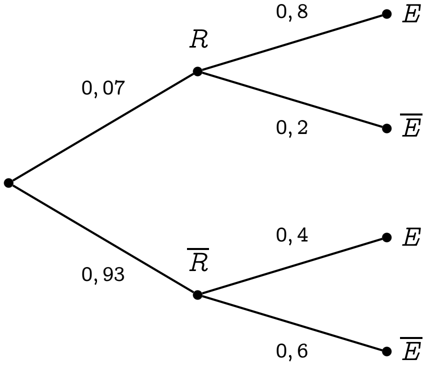


Et on a :

$$P(R \cap E) = P(R) \times P_R(E)$$

Exercice 1 - Partie A

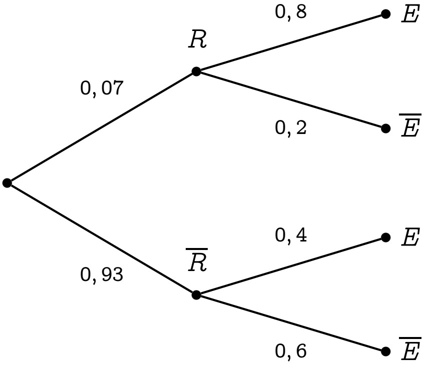
1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Et on a :

$$\begin{aligned} P(R \cap E) &= P(R) \times P_R(E) \\ &= 0,07 \times 0,8 \end{aligned}$$

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :

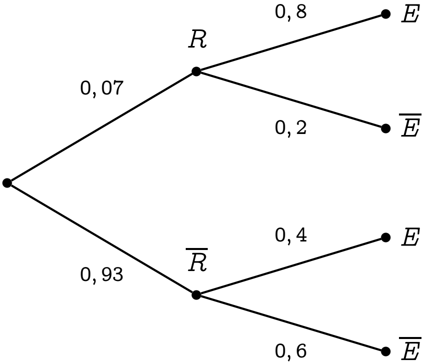


Et on a :

$$\begin{aligned} P(R \cap E) &= P(R) \times P_R(E) \\ &= 0,07 \times 0,8 \\ &= 0,056 \end{aligned}$$

Exercice 1 - Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Et on a :

$$\begin{aligned} P(R \cap E) &= P(R) \times P_R(E) \\ &= 0,07 \times 0,8 \\ &= 0,056 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(R \cap E) = 0,056}$$

2. Il s'agit de calculer $P(E)$.

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers.

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers. On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers. On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) =$$

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers. On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E) = P(R) \times P_R(E) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(E)$$

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers. On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(R) \times P_R(E) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(E) \\ &= 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,4 \end{aligned}$$

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers. On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(R) \times P_R(E) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(E) \\ &= 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,4 \\ &= 0,428 \end{aligned}$$

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers. On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(R) \times P_R(E) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(E) \\ &= 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,4 \\ &= 0,428 \end{aligned}$$

La probabilité de tirer une épée est donc :

$$\boxed{P(E) = 0,428}$$

3. Il s'agit de calculer $P_E(R)$:

3. Il s'agit de calculer $P_E(R)$:

$$P_E(R) =$$

3. Il s'agit de calculer $P_E(R)$:

$$P_E(R) = \frac{P(R \cap E)}{P(E)}$$

3. Il s'agit de calculer $P_E(R)$:

$$\begin{aligned} P_E(R) &= \frac{P(R \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{0,056}{0,428} \end{aligned}$$

3. Il s'agit de calculer $P_E(R)$:

$$\begin{aligned} P_E(R) &= \frac{P(R \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{0,056}{0,428} \\ &\approx 0,131 \end{aligned}$$

3. Il s'agit de calculer $P_E(R)$:

$$P_E(R) = \frac{P(R \cap E)}{P(E)} = \frac{0,056}{0,428} \approx 0,131$$

La probabilité de tirer un objet rare sachant que c'est une épée est donc :

$$\boxed{P_E(R) \approx 0,131}$$

Partie B

1. On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $0,07$.

Partie B

1. On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $0,07$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

1. On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $0,07$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = 0,07}$$

Partie B

1. On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $0,07$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = 0,07}$$

On sait alors que son espérance est
$E(X) =$

Partie B

1. On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $0,07$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = 0,07}$$

On sait alors que son espérance est
$E(X) = n \times p$

Partie B

1. On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $0,07$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

   $$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = 0,07}$$

   On sait alors que son espérance est
   $E(X) = n \times p = 30 \times 0,07$

Partie B

1. On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $0,07$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = 0,07}$$

On sait alors que son espérance est
$E(X) = n \times p = 30 \times 0,07 = 2,1$

1. On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $0,07$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = 0,07}$$

On sait alors que son espérance est
$E(X) = n \times p = 30 \times 0,07 = 2,1$, soit :

$$\boxed{E(X) = 2,1}$$

2. On a $P(X < 6) = P(X \leqslant 5)$

2. On a $P(X < 6) = P(X \leqslant 5)$ et on obtient, à l'aide de la calculatrice, $P(X \leqslant 5) \approx 0,984$

2. On a $P(X < 6) = P(X \leqslant 5)$ et on obtient, à l'aide de la calculatrice, $P(X \leqslant 5) \approx 0,984$, soit :

$$\boxed{P(X < 6) \approx 0,984}$$

3. On a :

- $P(X \geqslant 2) \approx 0,63 \geqslant 0,5$

3. On a :

- $P(X \geqslant 2) \approx 0,63 \geqslant 0,5$
- $P(X \geqslant 3) \approx 0,35 < 0,5$

3. On a :

- $P(X \geqslant 2) \approx 0,63 \geqslant 0,5$
- $P(X \geqslant 3) \approx 0,35 < 0,5$

La plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$ est donc :

3. On a :

- $P(X \geqslant 2) \approx 0,63 \geqslant 0,5$
- $P(X \geqslant 3) \approx 0,35 < 0,5$

La plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$ est donc :

$$\boxed{k = 2}$$

3. On a :
   - $P(X \geqslant 2) \approx 0,63 \geqslant 0,5$
   - $P(X \geqslant 3) \approx 0,35 < 0,5$

   La plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$ est donc :

   $$\boxed{k = 2}$$

   Cela signifie que sur les 30 objet tirés, il y a plus de 50 % de chances d'avoir au moins 2 objets rares.

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés.

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$.

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) =$$

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0)$$

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,93^n$$

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,93^n$$

Il s'agit alors de résoudre une inéquation :

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,93^n$$

Il s'agit alors de résoudre une inéquation :

$$P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95 \Longleftrightarrow$$

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,93^n$$

Il s'agit alors de résoudre une inéquation :

$$P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95 \Longleftrightarrow 1 - 0,93^N \geqslant 0,95$$

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,93^n$$

Il s'agit alors de résoudre une inéquation :

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95 &\iff 1 - 0,93^N \geqslant 0,95 \\ &\iff 0,93^N \leqslant 0,05 \end{aligned}$$

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,93^n$$

Il s'agit alors de résoudre une inéquation :

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95 &\iff 1 - 0,93^N \geqslant 0,95 \\ &\iff 0,93^N \leqslant 0,05 \\ &\iff \ln\left(0,93^N\right) \leqslant \ln(0,05) \end{aligned}$$

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,93^n$$

Il s'agit alors de résoudre une inéquation :

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95 &\iff 1 - 0,93^N \geqslant 0,95 \\ &\iff 0,93^N \leqslant 0,05 \\ &\iff \ln\left(0,93^N\right) \leqslant \ln(0,05) \\ &\iff N \ln(0,93) \leqslant \ln(0,05) \end{aligned}$$

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,93^n$$

Il s'agit alors de résoudre une inéquation :

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95 &\iff 1 - 0,93^N \geqslant 0,95 \\ &\iff 0,93^N \leqslant 0,05 \\ &\iff \ln\left(0,93^N\right) \leqslant \ln(0,05) \\ &\iff N \ln(0,93) \leqslant \ln(0,05) \\ &\iff N \geqslant \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)} \quad \textit{(car } \ln(0,93) < 0\textit{)} \end{aligned}$$

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,93^n$$

Il s'agit alors de résoudre une inéquation :

$$\begin{aligned}
P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95 &\iff 1 - 0,93^N \geqslant 0,95 \\
&\iff 0,93^N \leqslant 0,05 \\
&\iff \ln\left(0,93^N\right) \leqslant \ln(0,05) \\
&\iff N \ln(0,93) \leqslant \ln(0,05) \\
&\iff N \geqslant \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)} \quad \textit{(car } \ln(0,93) < 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)} \approx 41,3$

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0,07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,93^n$$

Il s'agit alors de résoudre une inéquation :

$$\begin{aligned}
P(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95 &\iff 1 - 0,93^N \geqslant 0,95 \\
&\iff 0,93^N \leqslant 0,05 \\
&\iff \ln\left(0,93^N\right) \leqslant \ln(0,05) \\
&\iff N \ln(0,93) \leqslant \ln(0,05) \\
&\iff N \geqslant \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)} \quad (\textit{car } \ln(0,93) < 0)
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)} \approx 41,3$ donc le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre l'objectif est :

$$\boxed{N = 42}$$

Exercice 2

1. **Réponse (c)**

Exercice 2

1. **Réponse (c)**
   La droite (AB) passe par le point $A(1\,;\,0\,;\,3)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Exercice 2

1. **Réponse (c)**
La droite (AB) passe par le point $A(1\,;0\,;3)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

Exercice 2

1. **Réponse (c)**
   La droite (AB) passe par le point $A(1\,;\,0\,;\,3)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

2. **Réponse (d)**

2. **Réponse (d)**
Le point $R(-3\,;-9\,;7)$ appartient à la droite (d),

2. **Réponse (d)**
   Le point $R(-3\,;-9\,;7)$ appartient à la droite (d), il s'agit du point de paramètre $t=-\dfrac{3}{2}$.

3. **Réponse (b)**

3. **Réponse (b)**

   La droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$

3. **Réponse (b)**

La droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ et la droite (d') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

3. **Réponse (b)**

La droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ et la droite (d') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires

3. **Réponse (b)**

La droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ et la droite (d') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

3. **Réponse (b)**

La droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ et la droite (d') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles. Déterminons alors leur intersection :

$$\begin{cases} 3+4t=-2+3k \\ 6t=-1-2k \\ 4-2t=1+k \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 3+4t=-2+3k \\ 6t=-1-2k \\ 4-2t=1+k \end{cases} \iff \begin{cases} 3+4t=-2+3(3-2t) \\ 6t=-1-2(3-2t) \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3+4t=-2+3k \\ 6t=-1-2k \\ 4-2t=1+k \end{cases} \iff \begin{cases} 3+4t=-2+3(3-2t) \\ 6t=-1-2(3-2t) \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3+4t=-2+9-6t \\ 6t=-1-6+4t \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3+4t=-2+3k \\ 6t=-1-2k \\ 4-2t=1+k \end{cases} \iff \begin{cases} 3+4t=-2+3(3-2t) \\ 6t=-1-2(3-2t) \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3+4t=-2+9-6t \\ 6t=-1-6+4t \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10t=4 \\ 2t=-7 \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3+4t=-2+3k \\ 6t=-1-2k \\ 4-2t=1+k \end{cases} \iff \begin{cases} 3+4t=-2+3(3-2t) \\ 6t=-1-2(3-2t) \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3+4t=-2+9-6t \\ 6t=-1-6+4t \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10t=4 \\ 2t=-7 \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=\dfrac{2}{5} \\ t=-\dfrac{7}{2} \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3+4t=-2+3k \\ 6t=-1-2k \\ 4-2t=1+k \end{cases} \iff \begin{cases} 3+4t=-2+3(3-2t) \\ 6t=-1-2(3-2t) \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3+4t=-2+9-6t \\ 6t=-1-6+4t \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10t=4 \\ 2t=-7 \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=\dfrac{2}{5} \\ t=-\dfrac{7}{2} \\ k=3-2t \end{cases}$$

Ce système n'admet aucune solution donc les droites n'ont aucun point d'intersection.

$$
\begin{cases} 3+4t=-2+3k \\ 6t=-1-2k \\ 4-2t=1+k \end{cases}
\iff
\begin{cases} 3+4t=-2+3(3-2t) \\ 6t=-1-2(3-2t) \\ k=3-2t \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} 3+4t=-2+9-6t \\ 6t=-1-6+4t \\ k=3-2t \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} 10t=4 \\ 2t=-7 \\ k=3-2t \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} t=\dfrac{2}{5} \\ t=-\dfrac{7}{2} \\ k=3-2t \end{cases}
$$

Ce système n'admet aucune solution donc les droites n'ont aucun point d'intersection. Finalement les droites (d) et (d') ne sont ni parallèles ni sécantes,

$$\begin{cases} 3+4t=-2+3k \\ 6t=-1-2k \\ 4-2t=1+k \end{cases} \iff \begin{cases} 3+4t=-2+3(3-2t) \\ 6t=-1-2(3-2t) \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3+4t=-2+9-6t \\ 6t=-1-6+4t \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10t=4 \\ 2t=-7 \\ k=3-2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t=\dfrac{2}{5} \\ t=-\dfrac{7}{2} \\ k=3-2t \end{cases}$$

Ce système n'admet aucune solution donc les droites n'ont aucun point d'intersection. Finalement les droites (d) et (d') ne sont ni parallèles ni sécantes, elles ne sont donc pas coplanaires.

4. **Réponse (a)**

4. **Réponse (a)**
   Le plan (P) est perpendiculaire à la droite (d),

4. **Réponse (a)**

   Le plan (P) est perpendiculaire à la droite (d), il admet donc pour vecteur normal un vecteur directeur de la droite (d),

4. **Réponse (a)**

   Le plan (P) est perpendiculaire à la droite (d), il admet donc pour vecteur normal un vecteur directeur de la droite (d), soit par exemple le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. **Réponse (a)**

Le plan (P) est perpendiculaire à la droite (d), il admet donc pour vecteur normal un vecteur directeur de la droite (d), soit par exemple le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$2x + 3y - z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

4. **Réponse (a)**

Le plan (P) est perpendiculaire à la droite (d), il admet donc pour vecteur normal un vecteur directeur de la droite (d), soit par exemple le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$2x + 3y - z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $I(2\,;1\,;0)$ appartient au plan, ses coordonnées vérifient l'équation.

4. **Réponse (a)**
Le plan (P) est perpendiculaire à la droite (d), il admet donc pour vecteur normal un vecteur directeur de la droite (d), soit par exemple le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$2x + 3y - z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $I(2\,;1\,;0)$ appartient au plan, ses coordonnées vérifient l'équation. On a alors $2 \times 2 + 3 \times 1 - 0 + d = 0$

4. **Réponse (a)**

Le plan (P) est perpendiculaire à la droite (d), il admet donc pour vecteur normal un vecteur directeur de la droite (d), soit par exemple le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$2x + 3y - z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $I(2\,;\,1\,;\,0)$ appartient au plan, ses coordonnées vérifient l'équation. On a alors $2 \times 2 + 3 \times 1 - 0 + d = 0$ soit $d = -7$.

4. **Réponse (a)**
Le plan (P) est perpendiculaire à la droite (d), il admet donc pour vecteur normal un vecteur directeur de la droite (d), soit par exemple le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$2x + 3y - z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $I(2\,;1\,;0)$ appartient au plan, ses coordonnées vérifient l'équation. On a alors $2 \times 2 + 3 \times 1 - 0 + d = 0$ soit $d = -7$. Le plan (P) admet donc pour équation cartésienne :

$$2x + 3y - z - 7 = 0$$

Exercice 3 - Partie A

1. On lit graphiquement que le coefficient directeur de la tangente (T) est égal à 3

1. On lit graphiquement que le coefficient directeur de la tangente (T) est égal à 3 , on a donc :

$$\boxed{f'(1) = 3}$$

Exercice 3 - Partie A

1. On lit graphiquement que le coefficient directeur de la tangente (T) est égal à 3 , on a donc :

$$\boxed{f'(1) = 3}$$

Et comme (T) coupe l'axe des ordonnées en -4

Exercice 3 - Partie A

1. On lit graphiquement que le coefficient directeur de la tangente (T) est égal à 3 , on a donc :

$$\boxed{f'(1) = 3}$$

Et comme (T) coupe l'axe des ordonnées en -4 , son ordonnée à l'origine est égale à -4.

Exercice 3 - Partie A

1. On lit graphiquement que le coefficient directeur de la tangente (T) est égal à 3 , on a donc :

$$\boxed{f'(1) = 3}$$

Et comme (T) coupe l'axe des ordonnées en -4 , son ordonnée à l'origine est égale à -4. L'équation réduite de (T) est donc :

$$\boxed{y = 3x - 4}$$

2. La fonction f semble :

2. La fonction f semble :
    - concave sur $]0\,;\,1]$

2. La fonction f semble :
   - concave sur $]0\,;\,1]$
   - convexe sur $[1\,;\,+\infty[$

2. La fonction f semble :
   - concave sur $]0\,;\,1]$
   - convexe sur $[1\,;\,+\infty[$

   La fonction semble changer de convexité en 1,

2. La fonction f semble :
   - concave sur $]0\,;\,1]$
   - convexe sur $[1\,;\,+\infty[$

   La fonction semble changer de convexité en 1, le point A semble donc être un point d'inflexion (la courbe traverse la tangente).

Partie B

Partie B

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Partie B

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

Et pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, on a $\ln(x^2) = 2\ln(x)$

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

Et pour tout $x \in]0\,; +\infty[$, on a $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ donc :

$$f(x) = 2x\ln(x) - \frac{1}{x}$$

Partie B

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

Et pour tout $x \in]0\,; +\infty[$, on a $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ donc :

On en déduit que : $$f(x) = 2x\ln(x) - \frac{1}{x}$$

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

Et pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$, on a $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ donc :

$$f(x) = 2x\ln(x) - \frac{1}{x}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty}$$

Partie B

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

Et pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$, on a $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ donc :

On en déduit que : $$f(x) = 2x\ln(x) - \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0 \quad \textit{(par croissances comparées)} \\ \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

2. (a) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et,

2. (a) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

2. (a) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) =$$

2. (a) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = 1 \times \ln(x^2) + x \times \frac{2x}{x^2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

2. (a) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln(x^2) + x \times \frac{2x}{x^2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

2. (a) La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln(x^2) + x \times \frac{2x}{x^2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2}}$$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f''(x) =$$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3}$$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{2x^2-2}{x^3} \end{aligned}$$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{2x^2 - 2}{x^3} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{x^3} \end{aligned}$$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{2x^2-2}{x^3} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{x^3} \\ &= \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3} \end{aligned}$$

2. (b) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{2x^2-2}{x^3} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{x^3} \\ &= \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}}$$

3. (a) Sur $]0\,;+\infty[$,

3. (a) Sur $]0\,;+\infty[$, $2(x+1)>0$

3. (a) Sur $]0\,;+\infty[$, $2(x+1) > 0$ et $x^3 > 0$

3. (a) Sur $]0\,;+\infty[$, $2(x+1)>0$ et $x^3>0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x-1$,

3. (a) Sur $]0\,;+\infty[$, $2(x+1)>0$ et $x^3>0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x-1$, d'où le tableau :

3. (a) Sur $]0\,;+\infty[$, $2(x+1)>0$ et $x^3>0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x-1$, d'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|$	concave		convexe	

3. (b) La fonction f'' étant la dérivée de la fonction f',

3. (b) La fonction f'' étant la dérivée de la fonction f', le signe de f'' permet de déterminer les variations de f'.

3. (b) La fonction f'' étant la dérivée de la fonction f', le signe de f'' permet de déterminer les variations de f'. On a alors le tableau :

3. (b) La fonction f'' étant la dérivée de la fonction f', le signe de f'' permet de déterminer les variations de f'. On a alors le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$\searrow$	3	$\nearrow$	

3. (b) La fonction f'' étant la dérivée de la fonction f', le signe de f'' permet de déterminer les variations de f'. On a alors le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

La fonction f' atteint donc son minimum en 1 et ce minimum vaut 3.

3. (b) La fonction f'' étant la dérivée de la fonction f', le signe de f'' permet de déterminer les variations de f'. On a alors le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$\searrow$	3	$\nearrow$	

La fonction f' atteint donc son minimum en 1 et ce minimum vaut 3. On en déduit que $f'(x) \geqslant 3$

3. (b) La fonction f'' étant la dérivée de la fonction f', le signe de f'' permet de déterminer les variations de f'. On a alors le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

La fonction f' atteint donc son minimum en 1 et ce minimum vaut 3. On en déduit que $f'(x) \geqslant 3$ et, a fortiori, $f(x) > 0$

3. (b) La fonction f'' étant la dérivée de la fonction f', le signe de f'' permet de déterminer les variations de f'. On a alors le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

La fonction f' atteint donc son minimum en 1 et ce minimum vaut 3. On en déduit que $f'(x) \geqslant 3$ et, a fortiori, $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$

3. (b) La fonction f'' étant la dérivée de la fonction f', le signe de f'' permet de déterminer les variations de f'. On a alors le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$\searrow$	3	$\nearrow$	

La fonction f' atteint donc son minimum en 1 et ce minimum vaut 3. On en déduit que $f'(x) \geqslant 3$ et, a fortiori, $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ et donc que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;+\infty[}$$

4. (a) Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

4. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue

4. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante.

4. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

4. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in\,]-\infty\,;+\infty[$

4. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in\,]-\infty\,;+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

4. (a) Sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in\,]-\infty\,;+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;+\infty[$.

4. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

4. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $f(1,32) \approx -0,02 < 0$

4. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $f(1,32) \approx -0,02 < 0$
- $f(1,33) \approx 0,007 > 0$

4. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $f(1,32) \approx -0,02 < 0$
- $f(1,33) \approx 0,007 > 0$

Donc :

$$\boxed{1,32 < \alpha < 1,33}$$

4. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $f(1,32) \approx -0,02 < 0$
- $f(1,33) \approx 0,007 > 0$

Donc :

$$\boxed{1,32 < \alpha < 1,33}$$

On sait que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire :

4. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $f(1,32) \approx -0,02 < 0$
- $f(1,33) \approx 0,007 > 0$

Donc :

$$\boxed{1,32 < \alpha < 1,33}$$

On sait que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire :

$$\alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0$$

4. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $f(1,32) \approx -0,02 < 0$
- $f(1,33) \approx 0,007 > 0$

Donc :

$$\boxed{1,32 < \alpha < 1,33}$$

On sait que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire :

$$\alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0$$

Puis :

$$\alpha \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}$$

4. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $f(1,32) \approx -0,02 < 0$
- $f(1,33) \approx 0,007 > 0$

Donc :

$$\boxed{1,32 < \alpha < 1,33}$$

On sait que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire :

$$\alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0$$

Puis :

$$\alpha \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}$$

Donc :

$$\ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}$$

4. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $f(1,32) \approx -0,02 < 0$
- $f(1,33) \approx 0,007 > 0$

Donc :

$$\boxed{1,32 < \alpha < 1,33}$$

On sait que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire :

$$\alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0$$

Puis :

$$\alpha \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}$$

Donc :

$$\ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}$$

Et enfin, en appliquant la fonction exponentielle :

4. (b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $f(1,32) \approx -0,02 < 0$
- $f(1,33) \approx 0,007 > 0$

Donc :

$$\boxed{1,32 < \alpha < 1,33}$$

On sait que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire :

$$\alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0$$

Puis :

$$\alpha \ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}$$

Donc :

$$\ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}$$

Et enfin, en appliquant la fonction exponentielle :

$$\boxed{\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}$$

Exercice 4

1. On a :

$$I_0 =$$

Exercice 4

1. On a :

$$I_0 = \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4

1. On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\cos(x) \Big]_0^{\pi} \end{aligned}$$

Exercice 4

1. On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \end{aligned}$$

Exercice 4

1. On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\ &= -(-1) + 1 \end{aligned}$$

Exercice 4

1. On a :

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} \\
&= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\
&= -(-1) + 1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Exercice 4

1. On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\ &= -(-1) + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I_0 = 2}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$,

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a $\mathrm{e}^{-nx} > 0$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a $\mathrm{e}^{-nx} > 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, on a $\mathrm{e}^{-nx} > 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$ donc :

$$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, on a $\mathrm{e}^{-nx} > 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$ donc :

$$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$$

Donc :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, on a $\mathrm{e}^{-nx} > 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$ donc :

$$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$$

Donc :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

Soit :

$$\boxed{I_n \geqslant 0}$$

2. (b) Pour tout entier naturel n, on a :

2. (b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$I_{n+1} - I_n =$$

2. (b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

2. (b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x) - \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

2. (b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x) \, \mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x) - \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

2. (b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x) - \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \geqslant 0$

2. (b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x)\, \mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x) - \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$

2. (b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x) - \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$ car $x \leqslant 0$.

2. (b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x) \, \mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x) - \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$ car $x \leqslant 0$. On en déduit que $\mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right) \leqslant 0$

2. (b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x) - \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Or, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$ car $x \leqslant 0$. On en déduit que $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right) \leqslant 0$ puis :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

2. (b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x} \sin(x) - \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0\,;\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$ car $x \leqslant 0$. On en déduit que $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right) \leqslant 0$ puis :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Soit :

$$\boxed{I_{n+1} - I_n \leqslant 0}$$

2. (c) D'après les questions précédentes, la suite (I_n) est :

2. (c) D'après les questions précédentes, la suite (I_n) est :

- décroissante car $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. (c) D'après les questions précédentes, la suite (I_n) est :

- décroissante car $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- minorée par 0 car $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. (c) D'après les questions précédentes, la suite (I_n) est :

- décroissante car $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- minorée par 0 car $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ converge}}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \quad \textit{(car } \sin(x) \leqslant 1\textit{)}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \quad \textit{(car } \sin(x) \leqslant 1\textit{)}$$

Donc par croissance de l'intégrale :

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \quad \textit{(car } \sin(x) \leqslant 1\textit{)}$$

Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \quad \textit{(car } \sin(x) \leqslant 1\textit{)}$$

Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

Soit :

$$\boxed{I_n \leqslant \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x}$$

3. (b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

3. (b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x =$$

3. (b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{\pi}$$

3. (b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{\pi}\\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi} - \left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{0}\right)\end{aligned}$$

3. (b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi} - \left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{0}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-n\pi}+1}{n}
\end{aligned}$$

3. (b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^{\pi}\\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi} - \left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{0}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{-n\pi}+1}{n}\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}}$$

3. (c) D'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

3. (c) D'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$$

3. (c) D'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$$

Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n} = 0$

3. (c) D'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes :

3. (c) D'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$$

4. (a) • **Première intégration par parties :**

4. (a)

- **Première intégration par parties :**

  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-nx} \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases}$$

4. (a)

- **Première intégration par parties :**
  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-nx} \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

4. (a)

- **Première intégration par parties :**
  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-nx} \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

4. (a) • **Première intégration par parties :**

On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-nx} \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$I_n =$$

4. (a)

- **Première intégration par parties :**
  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-nx} \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$I_n = \Big[-\cos(x)\mathrm{e}^{-nx}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

4. (a)

- **Première intégration par parties :**

  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-nx} \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

  On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[-\cos(x)\mathrm{e}^{-nx}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(\pi)\mathrm{e}^{-n\pi} + \cos(0)\mathrm{e}^{0} - n\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

4. (a)

- **Première intégration par parties :**
  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-nx} \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

  On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[-\cos(x)\mathrm{e}^{-nx}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(\pi)\mathrm{e}^{-n\pi} + \cos(0)\mathrm{e}^{0} - n\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - nJ_n \end{aligned}$$

4. (a)

- **Première intégration par parties :**

On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-nx} \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[-\cos(x)\mathrm{e}^{-nx}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(\pi)\mathrm{e}^{-n\pi} + \cos(0)\mathrm{e}^{0} - n\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - nJ_n \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n}$$

- **Deuxième intégration par parties :**

- **Deuxième intégration par parties :**
  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$$

- **Deuxième intégration par parties :**
  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$$

- **Deuxième intégration par parties :**
  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$$

  On a alors, par intégration par parties :

- **Deuxième intégration par parties :**

  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$I_n =$$

- **Deuxième intégration par parties :**
  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

- **Deuxième intégration par parties :**
  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi}\sin(\pi) + -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{0}\sin(0) + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- **Deuxième intégration par parties :**
  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi}\sin(\pi) + -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{0}\sin(0) + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n}J_n \end{aligned}$$

- **Deuxième intégration par parties :**
  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = e^{-nx} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = -\dfrac{1}{n}e^{-nx} \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\sin(x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n}e^{-nx}\cos(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{n}e^{-n\pi}\sin(\pi) + -\frac{1}{n}e^{0}\sin(0) + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(x)\,dx \\ &= \frac{1}{n}J_n \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n}J_n}$$

4. (b) On en déduit que :

4. (b) On en déduit que :

$$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n = \frac{1}{n} J_n$$

4. (b) On en déduit que :

$$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n = \frac{1}{n} J_n$$

Puis :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) J_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi}$$

4. (b) On en déduit que :

$$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n = \frac{1}{n} J_n$$

Puis :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) J_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi}$$

Soit :

$$\frac{n^2 + 1}{n} J_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi}$$

4. (b) On en déduit que :

$$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n = \frac{1}{n} J_n$$

Puis :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) J_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi}$$

Soit :

$$\frac{n^2 + 1}{n} J_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi}$$

Et donc :

$$J_n = \frac{n\left(1 + \mathrm{e}^{-n\pi}\right)}{n^2 + 1}$$

4. (b) On en déduit que :

$$1+\mathrm{e}^{-n\pi}-nJ_n=\frac{1}{n}J_n$$

Puis :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)J_n=1+\mathrm{e}^{-n\pi}$$

Soit :

$$\frac{n^2+1}{n}J_n=1+\mathrm{e}^{-n\pi}$$

Et donc :

$$J_n=\frac{n(1+\mathrm{e}^{-n\pi})}{n^2+1}$$

Et comme $I_n=\dfrac{1}{n}J_n$, on a :

4. (b) On en déduit que :

$$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n = \frac{1}{n} J_n$$

Puis :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) J_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi}$$

Soit :

$$\frac{n^2 + 1}{n} J_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi}$$

Et donc :

$$J_n = \frac{n\left(1 + \mathrm{e}^{-n\pi}\right)}{n^2 + 1}$$

Et comme $I_n = \dfrac{1}{n} J_n$, on a :

$$\boxed{I_n = \frac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2 + 1}}$$

5. On peut compléter le script de la façon suivante :

5. On peut compléter le script de la façon suivante :

```
from math import *
def seuil() :
    n = 0
    I = 2
    while I > 0.1 :
        n=n+1
        I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
    return n
```