ANNÉE 2024 - SUJET CORRIGÉ 1

AMÉRIQUE DU NORD - 21 MAI 2024

Exercice 1

Énoncé (5 points)

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.

Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

- la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;
- si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;
- si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet.
On note :

- R l'événement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'événement « le joueur tire une épée » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$ les événements contraires des événements R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. *Arrondir le résultat au millième.*

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.

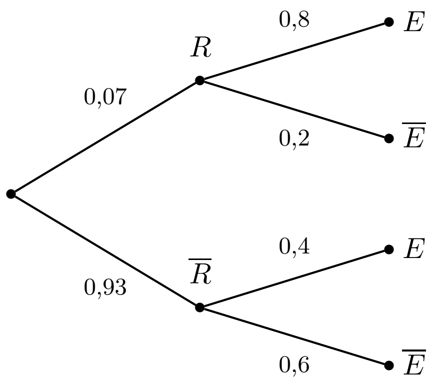
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2. Déterminer $P(X < 6)$. *Arrondir le résultat au millième.*
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0{,}5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %. Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0,95. Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. *On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.*

Correction

Partie A

1. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



Et on a :

$$\begin{aligned} P(R \cap E) &= P(R) \times P_R(E) \\ &= 0{,}07 \times 0{,}8 \\ &= 0{,}056 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{P(R \cap E) = 0{,}056}$$

2. Il s'agit de calculer $P(E)$. Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers. On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(R) \times P_R(E) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(E) \\ &= 0{,}07 \times 0{,}8 + 0{,}93 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}428 \end{aligned}$$

La probabilité de tirer une épée est donc :

$$\boxed{P(E) = 0{,}428}$$

3. Il s'agit de calculer $P_E(R)$:

$$\begin{aligned} P_E(R) &= \frac{P(R \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{0{,}056}{0{,}428} \\ &\approx 0{,}131 \end{aligned}$$

La probabilité de tirer un objet rare sachant que c'est une épée est donc :

$$\boxed{P_E(R) \approx 0{,}131}$$

Partie B

1. On répète 30 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est 0,07. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc :

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n = 30 \text{ et } p = 0{,}07}$$

On sait alors que son espérance est $E(X) = n \times p = 30 \times 0{,}07 = 2{,}1$, soit :

$$\boxed{E(X) = 2{,}1}$$

2. On a $P(X < 6) = P(X \leqslant 5)$ et on obtient, à l'aide de la calculatrice, $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}984$, soit :

$$\boxed{P(X < 6) \approx 0{,}984}$$

3. On a :
   - $P(X \geqslant 2) \approx 0{,}63 \geqslant 0{,}5$
   - $P(X \geqslant 3) \approx 0{,}35 < 0{,}5$

   La plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0{,}5$ est donc :

$$\boxed{k = 2}$$

   Cela signifie que sur les 30 objet tirés, il y a plus de 50 % de chances d'avoir au moins 2 objets rares.

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'objets rares parmi les N objets tirés. Y suit alors une loi binomiale de paramètres N et $p = 0{,}07$. La probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare est alors :

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0{,}93^n$$

   Il s'agit alors de résoudre une inéquation :

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}95 &\iff 1 - 0{,}93^N \geqslant 0{,}95 \\ &\iff 0{,}93^N \leqslant 0{,}05 \\ &\iff \ln\left(0{,}93^N\right) \leqslant \ln(0{,}05) \\ &\iff N \ln(0{,}93) \leqslant \ln(0{,}05) \\ &\iff N \geqslant \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}93)} \quad \textit{(car } \ln(0{,}93) < 0\textit{)} \end{aligned}$$

   Or $\dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}93)} \approx 41{,}3$ donc le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre l'objectif est :

$$\boxed{N = 42}$$

Commentaires

- Dans la question 2 de la partie B, on a $P(X < 6) = P(X \leqslant 5)$ car X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale et ne peut donc prendre que des valeurs entières. Elle ne peut pas prendre de valeurs comprises strictement entre 5 et 6.
- Dans la question 4 de la partie B, pour calculer $P(Y = 0)$, on utilise la formule :

$$P(Y = 0) = \binom{N}{0} \times 0{,}07^0 \times (1 - 0{,}07)^{N-0} = 1 \times 1 \times 0{,}93^N$$

- Toujours dans la question 4 de la partie B, on aurait pu résoudre l'inéquation en tâtonnant et en disant que :

  → $1 - 0{,}93^{41} \approx 0{,}949 < 0{,}95$

  → $1 - 0{,}93^{42} \approx 0{,}953 > 0{,}95$

  C'est donc bien à partir de $N = 42$ que la probabilité dépasse 0,95.

Exercice 2

Énoncé (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les cinq questions sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

1. On considère les points $A(1\,;\,0\,;\,3)$ et $B(4\,;\,1\,;\,0)$.
   Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

   (a) $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 1 \\ z = -3+3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

   (c) $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 3-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

   (b) $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

   (d) $\begin{cases} x = 4+t \\ y = 1 \\ z = 3-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On considère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

   (a) $M(7\,;\,6\,;\,6)$ (c) $P(4\,;\,6\,;\,-2)$
   (b) $N(3\,;\,6\,;\,4)$ (d) $R(-3\,;\,-9\,;\,7)$

3. On considère la droite (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2+3k \\ y = -1-2k \\ z = 1+k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

   Les droites (d) et (d') sont :

   (a) sécantes (c) parallèles
   (b) non coplanaires (d) confondues

4. On considère le plan (P) passant par le point $I(2\,;\,1\,;\,0)$ et perpendiculaire à la droite (d).
   Une équation du plan (P) est :

   (a) $2x+3y-z-7=0$ (c) $4x+6y-2z+9=0$
   (b) $-x+y-4z+1=0$ (d) $2x+y+1=0$

Correction

1. **Réponse (c)**

   La droite (AB) passe par le point $A(1\,;\,0\,;\,3)$ et admet le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Elle admet donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

2. **Réponse (d)**
Le point $R(-3\,;\,-9\,;\,7)$ appartient à la droite (d), il s'agit du point de paramètre $t = -\dfrac{3}{2}$.

3. **Réponse (b)**
La droite (d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et la droite (d') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles. Déterminons alors leur intersection :

$$\begin{cases} 3 + 4t = -2 + 3k \\ 6t = -1 - 2k \\ 4 - 2t = 1 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 4t = -2 + 3(3 - 2t) \\ 6t = -1 - 2(3 - 2t) \\ k = 3 - 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 4t = -2 + 9 - 6t \\ 6t = -1 - 6 + 4t \\ k = 3 - 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10t = 4 \\ 2t = -7 \\ k = 3 - 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{2}{5} \\ t = -\dfrac{7}{2} \\ k = 3 - 2t \end{cases}$$

Ce système n'admet aucune solution donc les droites n'ont aucun point d'intersection. Finalement les droites (d) et (d') ne sont ni parallèles ni sécantes, elles ne sont donc pas coplanaires.

4. **Réponse (a)**
Le plan (P) est perpendiculaire à la droite (d), il admet donc pour vecteur normal un vecteur directeur de la droite (d), soit par exemple le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$2x + 3y - z + d = 0 \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Et comme le point $I(2\,;\,1\,;\,0)$ appartient au plan, ses coordonnées vérifient l'équation. On a alors $2 \times 2 + 3 \times 1 - 0 + d = 0$ soit $d = -7$. Le plan (P) admet donc pour équation cartésienne :

$$2x + 3y - z - 7 = 0$$

Commentaires

- Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée. J'ai tout de même proposé des justifications car sinon, cette correction n'aurait pas eu un grand intérêt.
- D'après sa représentation paramétrique, la droite (d) admet pour vecteur directeur le vecteur

$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et donc n'importe quel vecteur qui lui est colinéaire. On peut donc choisir, par exemple, le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Dans la question 4, l'équation étant donnée, on pouvait aussi simplement vérifier que le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ était un vecteur normal et que les coordonnées de I vérifiaient l'équation.

Exercice 3

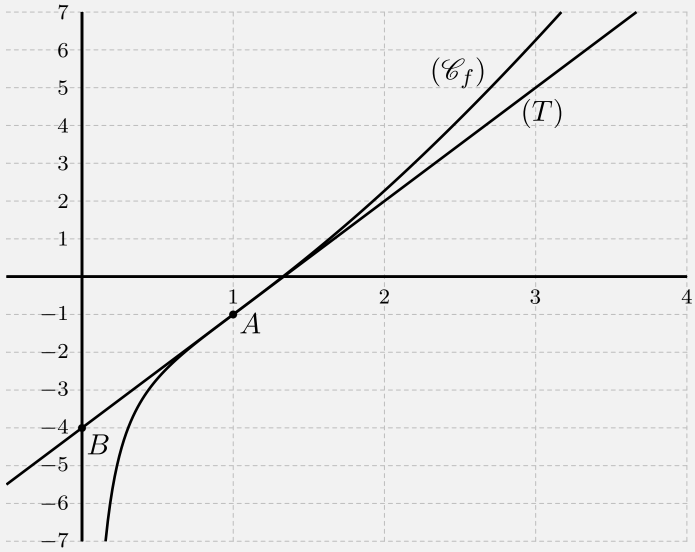
Énoncé (5 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{x}$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $(1\,;\,-1)$. Cette tangente passe également par le point $B(0\,;\,-4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave. Que semble représenter le point A pour la courbe $\mathscr{C}_f$?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (a) Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(b) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$$

3.(a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(b) Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4.(a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(b) Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :

$$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Correction
Partie A

1. On lit graphiquement que le coefficient directeur de la tangente (T) est égal à 3, on a donc :

$$\boxed{f'(1) = 3}$$

Et comme (T) coupe l'axe des ordonnées en -4, son ordonnée à l'origine est égale à -4. L'équation réduite de (T) est donc :

$$\boxed{y = 3x - 4}$$

2. La fonction f semble :
   - concave sur $]0\,;\,1]$
   - convexe sur $[1\,;\,+\infty[$

   La fonction semble changer de convexité en 1, le point A semble donc être un point d'inflexion (la courbe traverse la tangente).

Partie B

1. On a :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

Et pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$, on a $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ donc :

$$f(x) = 2x\ln(x) - \frac{1}{x}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to0} f(x) = -\infty} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to0} x\ln(x) = 0 \quad \textit{(par croissances comparées)} \\ \displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

2.(a) La fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x \in\,]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln(x^2) + x \times \frac{2x}{x^2} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f'(x) = \ln(x^2) + 2 + \frac{1}{x^2}}$$

(b) La fonction f' est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{2x^2-2}{x^3} \\ &= \frac{2(x^2-1)}{x^3} \\ &= \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}}$$

3.(a) Sur $]0\,;\,+\infty[$, $2(x+1) > 0$ et $x^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x-1$, d'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	concave		convexe	

(b) La fonction f'' étant la dérivée de la fonction f', le signe de f'' permet de déterminer les variations de f'. On a alors le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	↘	3	↗	

La fonction f' atteint donc son minimum en 1 et ce minimum vaut 3. On en déduit que $f'(x) \geqslant 3$ et, a fortiori, $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ et donc que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;\,+\infty[}$$

4.(a) Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Or $0 \in]-\infty\,;\,+\infty[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.

(b) On obtient, à l'aide de la calculatrice :

- $f(1{,}32) \approx -0{,}02 < 0$
- $f(1{,}33) \approx 0{,}007 > 0$

Donc :

$$\boxed{1{,}32 < \alpha < 1{,}33}$$

On sait que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire :

$$\alpha\ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0$$

Puis :

$$\alpha\ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha}$$

Donc :

$$\ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}$$

Et enfin, en appliquant la fonction exponentielle :

$$\boxed{\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}$$

Commentaires

- Dans la question 1 de la partie A, pour calculer le coefficient directeur m de la droite (T), sachant qu'elle passe par les points A et B, on peut utiliser la formule :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4-(-1)}{0-1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

On retient cette formule sous la forme « la différence des ordonnées sur la différence des abscisses ».

- Pour conjecturer la convexité d'une fonction, il faut retenir que si la courbe « regarde vers le haut » alors la fonction est convexe, et si la courbe « regarde vers le bas » alors la fonction est concave, .
- Dans la question 2 de la partie B, pour le calcul de la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x^2)$, on peut soit utiliser la formule $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ ou alors écrire $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ et on obtient alors pour dérivée la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x}$.
- Pour calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, on peut remarquer que $\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ et utiliser la formule habituelle qui donne la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$. On obtient ainsi $-2x^{-3}$ soit $-\dfrac{2}{x^3}$.

Exercice 4

Énoncé (6 points)

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$J_n = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0.
2. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $I_n \geqslant 0$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$I_n \leqslant \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$$

(c) Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).

4.(a) En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

(b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $I_n = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}$.

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```python
from math import *
def seuil() :
    n=0
    I=2
    ...
        n=n+1
        I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
    return n
```

Correction

1. On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\ &= -(-1) + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I_0 = 2}$$

2.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a $\mathrm{e}^{-nx} > 0$ et $\sin(x) \geqslant 0$ donc :

$$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$$

Donc :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$

Soit :

$$\boxed{I_n \geqslant 0}$$

(b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x) - \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$ car $x \leqslant 0$. On en déduit que $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right) \leqslant 0$ puis :

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$$

Soit :

$$\boxed{I_{n+1} - I_n \leqslant 0}$$

(c) D'après les questions précédentes, la suite (I_n) est :

- décroissante car $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- minorée par 0 car $I_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ converge}}$$

3.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0\,;\,\pi]$, on a :

$$\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \quad \textit{(car } \sin(x) \leqslant 1\textit{)}$$

Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

Soit :

$$\boxed{I_n \leqslant \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x}$$

(b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi} - \left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{0}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-n\pi}+1}{n}\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}}$$

(c) D'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

4.(a)
- **Première intégration par parties :**
  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{-nx} \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = -n\mathrm{e}^{-nx} \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[-\cos(x)\mathrm{e}^{-nx}\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(\pi)\mathrm{e}^{-n\pi} + \cos(0)\mathrm{e}^{0} - n\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{-n\pi} + 1 - nJ_n \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n}$$

- **Deuxième intégration par parties :**
  On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \sin(x) \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = \cos(x) \\ v(x) = -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$$

  On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\pi}\sin(\pi) + -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{0}\sin(0) + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n}J_n \end{aligned}$$

  Soit :

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n}J_n}$$

(b) On en déduit que :

$$1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n = \frac{1}{n}J_n$$

Puis :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)J_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi}$$

Soit :

$$\frac{n^2+1}{n}J_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi}$$

Et donc :

$$J_n = \frac{n(1+\mathrm{e}^{-n\pi})}{n^2+1}$$

Et comme $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$, on a :

$$\boxed{I_n = \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}}$$

5. On peut compléter le script de la façon suivante :

```
from math import *
def seuil() :
    n = 0
    I = 2
    while I > 0.1 :
        n=n+1
        I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
    return n
```

Commentaires

- Dans cet exercice, on utilise les propriétés de positivité et de croissance de l'intégrale. Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$, on a :
  - → Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ (positivité).
  - → Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a\,;\,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ (croissance).
  - → Si a est un réel alors la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ admet pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$.