Exercice 8.1
Le 100 mètres olympique

Fabien Vinsu

Tle

Spécialité
Mathématiques

Incontournables, classiques, Grand Oral :
44 exercices progressifs corrigés et commentés

ellipses

1. (a) On se trouve dans une situation où :

1. (a) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.

1. (a) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

1. (a) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.
   - On choisit tous les coureurs.

1. (a) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.
   - On choisit tous les coureurs.

   Il s'agit donc du nombre de permutations dans un ensemble à 8 éléments.

1. (a) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.
   - On choisit tous les coureurs.

   Il s'agit donc du nombre de permutations dans un ensemble à 8 éléments. Le nombre de classements possibles à l'arrivée est donc :

1. (a) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.
   - On choisit tous les coureurs.

   Il s'agit donc du nombre de permutations dans un ensemble à 8 éléments. Le nombre de classements possibles à l'arrivée est donc :

$$\boxed{8! = 40\,320}$$

1. (b) On se trouve dans une situation où :

1. (b) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.

1. (b) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

1. (b) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de 3-uplets (ou triplets) d'éléments distincts dans un ensemble à 8 éléments.

1. (b) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de 3-uplets (ou triplets) d'éléments distincts dans un ensemble à 8 éléments. On a alors :

1. (b) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de 3-uplets (ou triplets) d'éléments distincts dans un ensemble à 8 éléments. On a alors :

$$\frac{8!}{(8-3)!} =$$

1. (b) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de 3-uplets (ou triplets) d'éléments distincts dans un ensemble à 8 éléments. On a alors :

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!}$$

1. (b) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de 3-uplets (ou triplets) d'éléments distincts dans un ensemble à 8 éléments. On a alors :

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6$$

1. (b) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de 3-uplets (ou triplets) d'éléments distincts dans un ensemble à 8 éléments. On a alors :

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

1. (b) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de 3-uplets (ou triplets) d'éléments distincts dans un ensemble à 8 éléments. On a alors :

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

   Le nombre de podiums possibles est donc :

1. (b) On se trouve dans une situation où :
   - On tient compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de 3-uplets (ou triplets) d'éléments distincts dans un ensemble à 8 éléments. On a alors :

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

   Le nombre de podiums possibles est donc :

$$\boxed{\frac{8!}{(8-3)!} = 336}$$

1. (c) On se trouve dans une situation où :

1. (c) On se trouve dans une situation où :
    - On ne tient pas compte de l'ordre.

1. (c) On se trouve dans une situation où :
   - On ne tient pas compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

1. (c) On se trouve dans une situation où :
   - On ne tient pas compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 8 :

1. (c) On se trouve dans une situation où :
   - On ne tient pas compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 8 :

$$\binom{8}{3} =$$

1. (c) On se trouve dans une situation où :
   - On ne tient pas compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 8 :

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!}$$

1. (c) On se trouve dans une situation où :
   - On ne tient pas compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 8 :

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \times 5!}$$

1. (c) On se trouve dans une situation où :
   - On ne tient pas compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 8 :

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$$

1. (c) On se trouve dans une situation où :
   - On ne tient pas compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 8 :

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7$$

1. (c) On se trouve dans une situation où :
   - On ne tient pas compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 8 :

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

1. (c) On se trouve dans une situation où :
   - On ne tient pas compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 8 :

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

   Le nombre de possibilités pour le groupe formé par les 3 athlètes médaillés est donc :

1. (c) On se trouve dans une situation où :
   - On ne tient pas compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 8 :

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

   Le nombre de possibilités pour le groupe formé par les 3 athlètes médaillés est donc :

$$\boxed{\binom{8}{3} = 56}$$

2. (a) On se trouve dans une situation où :

2. (a) On se trouve dans une situation où :
   - On ne tient pas compte de l'ordre.

2. (a) On se trouve dans une situation où :
   - On ne tient pas compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

2. (a) On se trouve dans une situation où :
   - On ne tient pas compte de l'ordre.
   - Il ne peut pas y avoir de répétition.

   Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 8.

2. (a) On se trouve dans une situation où :

- On ne tient pas compte de l'ordre.
- Il ne peut pas y avoir de répétition.

Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 8.

$$\binom{8}{4} =$$

2. (a) On se trouve dans une situation où :

- On ne tient pas compte de l'ordre.
- Il ne peut pas y avoir de répétition.

Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 8.

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!}$$

2. (a) On se trouve dans une situation où :

- On ne tient pas compte de l'ordre.
- Il ne peut pas y avoir de répétition.

Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 8.

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4! \times 4!}$$

2. (a) On se trouve dans une situation où :

- On ne tient pas compte de l'ordre.
- Il ne peut pas y avoir de répétition.

Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 8.

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

2. (a) On se trouve dans une situation où :

- On ne tient pas compte de l'ordre.
- Il ne peut pas y avoir de répétition.

Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 8.

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 2 \times 5$$

2. (a) On se trouve dans une situation où :

- On ne tient pas compte de l'ordre.
- Il ne peut pas y avoir de répétition.

Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 8.

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 2 \times 5 = 70$$

2. (a) On se trouve dans une situation où :

- On ne tient pas compte de l'ordre.
- Il ne peut pas y avoir de répétition.

Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 8.

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 2 \times 5 = 70$$

Le nombre de possibilités pour le choix des 4 athlètes participant au contrôle est donc :

2. (a) On se trouve dans une situation où :

- On ne tient pas compte de l'ordre.
- Il ne peut pas y avoir de répétition.

Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 8.

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 2 \times 5 = 70$$

Le nombre de possibilités pour le choix des 4 athlètes participant au contrôle est donc :

$$\boxed{\binom{8}{4} = 70}$$

2. (b) Pour chaque valeur de k, il s'agit de déterminer le nombre de possibilités de choisir k éléments parmi 8,

2. (b) Pour chaque valeur de k, il s'agit de déterminer le nombre de possibilités de choisir k éléments parmi 8, c'est-à-dire le nombre de combinaisons de k éléments parmi 8.

2. (b) Pour chaque valeur de k, il s'agit de déterminer le nombre de possibilités de choisir k éléments parmi 8, c'est-à-dire le nombre de combinaisons de k éléments parmi 8. On obtient alors les valeurs :

2. (b) Pour chaque valeur de k, il s'agit de déterminer le nombre de possibilités de choisir k éléments parmi 8, c'est-à-dire le nombre de combinaisons de k éléments parmi 8. On obtient alors les valeurs :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\binom{8}{k}$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

2. (c) Le nombre de choix possibles est égal à la somme des valeurs obtenues dans le tableau précédent,

2. (c) Le nombre de choix possibles est égal à la somme des valeurs obtenues dans le tableau précédent, soit à :

$$1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1$$

2. (c) Le nombre de choix possibles est égal à la somme des valeurs obtenues dans le tableau précédent, soit à :

$$1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 256$$

2. (c) Le nombre de choix possibles est égal à la somme des valeurs obtenues dans le tableau précédent, soit à :

$$1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 256$$

Or $2^8 = 256$,

2. (c) Le nombre de choix possibles est égal à la somme des valeurs obtenues dans le tableau précédent, soit à :

$$1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 256$$

Or $2^8 = 256$, on a donc bien l'égalité.

2. (c) Le nombre de choix possibles est égal à la somme des valeurs obtenues dans le tableau précédent, soit à :

$$1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 256$$

Or $2^8 = 256$, on a donc bien l'égalité. Autrement dit, on a :

2. (c) Le nombre de choix possibles est égal à la somme des valeurs obtenues dans le tableau précédent, soit à :

$$1 + 8 + 28 + 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 256$$

Or $2^8 = 256$, on a donc bien l'égalité. Autrement dit, on a :

$$\boxed{\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 2^8}$$

2. (d) On a calculé, de deux façons différentes, le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments.

2. (d) On a calculé, de deux façons différentes, le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments.
   - D'une part en regroupant ensemble les parties ayant le même nombre d'éléments.

2. (d) On a calculé, de deux façons différentes, le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments.
   - D'une part en regroupant ensemble les parties ayant le même nombre d'éléments. Il y a une partie à 0 élément,

2. (d) On a calculé, de deux façons différentes, le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments.
   - D'une part en regroupant ensemble les parties ayant le même nombre d'éléments. Il y a une partie à 0 élément, 8 parties à 1 élément,

2. (d) On a calculé, de deux façons différentes, le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments.

   - D'une part en regroupant ensemble les parties ayant le même nombre d'éléments. Il y a une partie à 0 élément, 8 parties à 1 élément, 28 parties à 2 éléments,

2. (d) On a calculé, de deux façons différentes, le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments.
   - D'une part en regroupant ensemble les parties ayant le même nombre d'éléments. Il y a une partie à 0 élément, 8 parties à 1 élément, 28 parties à 2 éléments, 56 parties à 3 éléments...

2. (d) On a calculé, de deux façons différentes, le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments.
   - D'une part en regroupant ensemble les parties ayant le même nombre d'éléments. Il y a une partie à 0 élément, 8 parties à 1 élément, 28 parties à 2 éléments, 56 parties à 3 éléments... Puis en faisant la somme de toutes ces possibilités.

2. (d) On a calculé, de deux façons différentes, le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments.
   - D'une part en regroupant ensemble les parties ayant le même nombre d'éléments. Il y a une partie à 0 élément, 8 parties à 1 élément, 28 parties à 2 éléments, 56 parties à 3 éléments... Puis en faisant la somme de toutes ces possibilités.
   - D'autre part en utilisant directement la formule qui dit que le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments est 2^8.

2. (d) On a calculé, de deux façons différentes, le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments.
   - D'une part en regroupant ensemble les parties ayant le même nombre d'éléments. Il y a une partie à 0 élément, 8 parties à 1 élément, 28 parties à 2 éléments, 56 parties à 3 éléments... Puis en faisant la somme de toutes ces possibilités.
   - D'autre part en utilisant directement la formule qui dit que le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments est 2^8.

   Cela justifie l'égalité, que l'on peut également écrire :

2. (d) On a calculé, de deux façons différentes, le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments.
   - D'une part en regroupant ensemble les parties ayant le même nombre d'éléments. Il y a une partie à 0 élément, 8 parties à 1 élément, 28 parties à 2 éléments, 56 parties à 3 éléments... Puis en faisant la somme de toutes ces possibilités.
   - D'autre part en utilisant directement la formule qui dit que le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments est 2^8.

   Cela justifie l'égalité, que l'on peut également écrire :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} = 2^8}$$

3. Soit A un ensemble fini à n éléments.

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments.

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A,

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A, noté $\mathscr{P}(A)$.

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A, noté $\mathscr{P}(A)$. On a alors d'une part :

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A, noté $\mathscr{P}(A)$. On a alors d'une part :

$$\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right) =$$

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A, noté $\mathscr{P}(A)$. On a alors d'une part :

$$\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right) = \text{Card}\left(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n\right)$$

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A, noté $\mathscr{P}(A)$. On a alors d'une part :

$$\begin{aligned}\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right) &= \text{Card}\left(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n\right)\\ &= \text{Card}\left(A_0\right) + \text{Card}\left(A_1\right) + \ldots + \text{Card}\left(A_n\right)\end{aligned}$$

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A, noté $\mathscr{P}(A)$. On a alors d'une part :

$$\begin{aligned}\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right) &= \text{Card}\left(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n\right)\\ &= \text{Card}\left(A_0\right) + \text{Card}\left(A_1\right) + \ldots + \text{Card}\left(A_n\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \text{Card}\left(A_k\right)\end{aligned}$$

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A, noté $\mathscr{P}(A)$. On a alors d'une part :

$$\begin{aligned}
\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right) &= \text{Card}\left(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) \\
&= \text{Card}\left(A_0\right) + \text{Card}\left(A_1\right) + \ldots + \text{Card}\left(A_n\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \text{Card}\left(A_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A, noté $\mathscr{P}(A)$. On a alors d'une part :

$$\begin{aligned}\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right) &= \text{Card}\left(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n\right)\\ &= \text{Card}\left(A_0\right) + \text{Card}\left(A_1\right) + \ldots + \text{Card}\left(A_n\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \text{Card}\left(A_k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\end{aligned}$$

Et, d'autre part, A étant un ensemble fini à n éléments,

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A, noté $\mathscr{P}(A)$. On a alors d'une part :

$$\begin{aligned}
\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right) &= \text{Card}\left(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) \\
&= \text{Card}\left(A_0\right) + \text{Card}\left(A_1\right) + \ldots + \text{Card}\left(A_n\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \text{Card}\left(A_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Et, d'autre part, A étant un ensemble fini à n éléments, on sait que $\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right) = 2^n$.

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A, noté $\mathscr{P}(A)$. On a alors d'une part :

$$\begin{aligned}\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right) &= \text{Card}\left(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n\right)\\ &= \text{Card}\left(A_0\right) + \text{Card}\left(A_1\right) + \ldots + \text{Card}\left(A_n\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \text{Card}\left(A_k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\end{aligned}$$

Et, d'autre part, A étant un ensemble fini à n éléments, on sait que $\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right) = 2^n$. D'où l'égalité :

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A, noté $\mathscr{P}(A)$. On a alors d'une part :

$$\begin{aligned}\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right) &= \text{Card}\left(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n\right)\\ &= \text{Card}\left(A_0\right) + \text{Card}\left(A_1\right) + \ldots + \text{Card}\left(A_n\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \text{Card}\left(A_k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\end{aligned}$$

Et, d'autre part, A étant un ensemble fini à n éléments, on sait que $\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right) = 2^n$. D'où l'égalité :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$