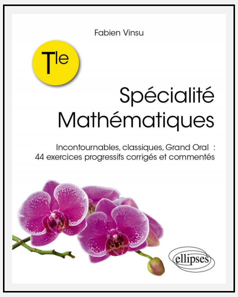
Exercice 8.1 - Le 100 mètres olympique



1. En finale du 100 mètres aux jeux olympiques, il y a 8 coureurs. On considère qu'il ne peut pas y avoir d'ex aequo.
   (a) Combien y a-t-il de classements possibles à l'arrivée ?
   (b) Combien y a-t-il de podiums différents possibles ?
   (c) Combien y a-t-il de possibilités pour le groupe formé par les 3 athlètes médaillés ?
2. On choisit certains coureurs (entre 0 et 8) afin d'effectuer un contrôle antidopage.
   (a) Supposons que 4 coureurs soient choisis pour effectuer ce contrôle. Combien y a-t-il de possibilités pour le choix de ces 4 coureurs ?
   (b) Soit k un entier compris entre 0 et 8. Déterminer, pour chaque valeur de k, le nombre de possibilités de choisir k coureurs parmi les 8.
   (c) Vérifier que le nombre total de choix possibles des coureurs participant au contrôle antidopage est égal à 2^8.
   (d) Expliquer ce résultat.
3. Soit n un entier naturel non nul. En généralisant le raisonnement précédent à un groupe de n personnes, démontrer la formule :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Correction

1.(a) On se trouve dans une situation où :

➝ On tient compte de l'ordre.

➝ Il ne peut pas y avoir de répétition.

➝ On choisit tous les coureurs.

Il s'agit donc du nombre de permutations dans un ensemble à 8 éléments. Le nombre de classements possibles à l'arrivée est donc :

$$\boxed{8! = 40\,320}$$

(b) On se trouve dans une situation où :

➝ On tient compte de l'ordre.

➝ Il ne peut pas y avoir de répétition.

Il s'agit donc du nombre de 3-uplets (ou triplets) d'éléments distincts dans un ensemble à 8 éléments. On a alors :

$$\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Le nombre de podiums possibles est donc :

$$\boxed{\frac{8!}{(8-3)!} = 336}$$

(c) On se trouve dans une situation où :

➝ On ne tient pas compte de l'ordre.

➝ Il ne peut pas y avoir de répétition.

Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 8 :

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

Le nombre de possibilités pour le groupe formé par les 3 athlètes médaillés est donc :

$$\boxed{\binom{8}{3} = 56}$$

2.(a) On se trouve dans une situation où :

➝ On ne tient pas compte de l'ordre.

➝ Il ne peut pas y avoir de répétition.

Il s'agit donc du nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 8.

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 2 \times 5 = 70$$

Le nombre de possibilités pour le choix des 4 athlètes participant au contrôle est donc :

$$\boxed{\binom{8}{4} = 70}$$

(b) Pour chaque valeur de k, il s'agit de déterminer le nombre de possibilités de choisir k éléments parmi 8, c'est-à-dire le nombre de combinaisons de k éléments parmi 8. On obtient alors les valeurs :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\binom{8}{k}$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

(c) Le nombre de choix possibles est égal à la somme des valeurs obtenues dans le tableau précédent, soit à :

$$1+8+28+56+70+56+28+8+1=256$$

Or $2^8=256$, on a donc bien l'égalité. Autrement dit, on a :

$$\boxed{\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}=2^8}$$

(d) On a calculé, de deux façons différentes, le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments.

- D'une part en regroupant ensemble les parties ayant le même nombre d'éléments. Il y a une partie à 0 élément, 8 parties à 1 élément, 28 parties à 2 éléments, 56 parties à 3 éléments... Puis en faisant la somme de toutes ces possibilités.
- D'autre part en utilisant directement la formule qui dit que le nombre de parties dans un ensemble à 8 éléments est 2^8.

Cela justifie l'égalité, que l'on peut également écrire :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}=2^8}$$

3. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments. Les ensembles A_k sont deux à deux disjoints et leur réunion est l'ensemble de toutes les parties de A, noté $\mathscr{P}(A)$. On a alors d'une part :

$$\begin{aligned}\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right) &= \text{Card}\left(A_0\cup A_1\cup ...\cup A_n\right)\\ &= \text{Card}\left(A_0\right)+\text{Card}\left(A_1\right)+...+\text{Card}\left(A_n\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\text{Card}\left(A_k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\end{aligned}$$

Et, d'autre part, A étant un ensemble fini à n éléments, on sait que $\text{Card}\left(\mathscr{P}(A)\right)=2^n$. D'où l'égalité :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n}$$

Commentaires

- On rappelle que, si n est un entier naturel non nul, alors la factorielle de n, notée $n!$ est le produit de tous les entiers naturels compris entre 1 et n. Autrement dit :

$$\boxed{n!=1\times 2\times 3\times\cdots\times n}$$

  Et par convention $0!=1$.
- On rappelle que, si n est un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n, alors le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ se lit « k parmi n » et on a la formule :

$$\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

- Les questions à se poser, afin d'identifier une situation de dénombrement, sont les suivantes :
  - → Est-ce que l'on tient compte de l'ordre ?
  - → Peut-il y avoir des répétitions ?
  - → Est-ce que l'on choisit tous les éléments ?

  On utilise alors la notion de dénombrement adéquate.

  ➢ **Nombre de k-uplets d'un ensemble :**
  Un k-uplet d'un ensemble A est une liste ordonnée de k éléments de A. On rencontre les k-uplets lorsque :
  - → On tient compte de l'ordre (tirages successifs).
  - → Il peut y avoir des répétitions (tirages avec remise).

  Le nombre de k-uplets dans un ensemble à n éléments est n^k.

  ➢ **Nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble :**
  Soit A un ensemble à n éléments. On appelle arrangement de k éléments de A (ou k-arrangement) un k-uplet d'éléments distincts de A. On rencontre les k-uplets d'éléments distincts lorsque :
  - → On tient compte de l'ordre (tirages successifs).
  - → Il ne peut pas y avoir de répétition (tirages sans remise)

  Le nombre de k-uplets d'éléments distincts dans un ensemble à n éléments est $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

  ➢ **Nombre de permutations d'un ensemble :**
  Soit A un ensemble à n éléments. Une permutation de A est un n-uplet d'éléments distincts de A. On rencontre les permutations lorsque :
  - → On tient compte de l'ordre (tirages successifs).
  - → Il ne peut pas y avoir de répétition (tirages sans remise)
  - → On tire tous les éléments.

  Le nombre de permutations dans un ensemble à n éléments est $n!$.

  ➢ **Nombre de combinaisons :**
  Soit A un ensemble à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n. Une combinaison de k éléments de A est une partie de A à k éléments. On note $\dbinom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k éléments parmi n. On rencontre les combinaisons lorsque :
  - → On ne tient pas compte de l'ordre (tirages simultanés).
  - → Il ne peut pas y avoir de répétition.

  Le nombre de combinaisons de k éléments dans un ensemble à n éléments est $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

- Une autre démonstration de la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ utilise la formule du binôme de Newton.