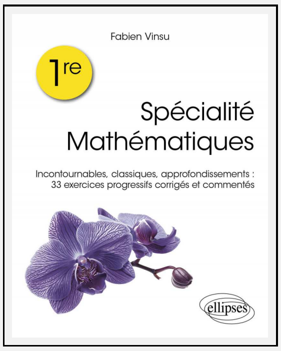
Exercice 8.2 - Filles et mathématiques



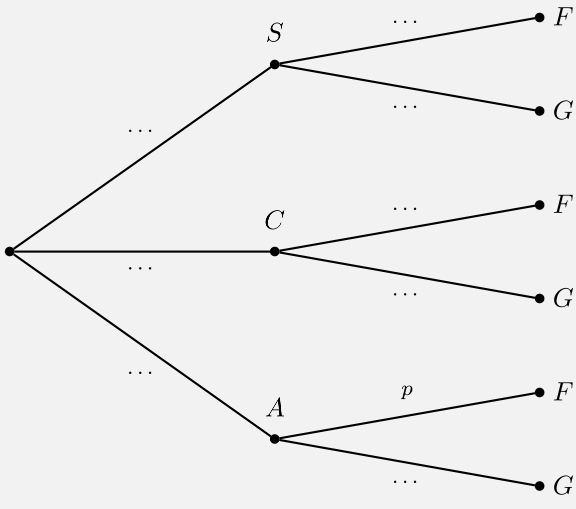
À la rentrée 2022, parmi les élèves de terminale générale, 40 % suivent la spécialité mathématiques et 16 % suivent l'option mathématiques complémentaires. Les autres ne font (malheureusement) pas de mathématiques et c'est bien dommage. Un élève ne peut pas suivre à la fois la spécialité maths et l'option maths complémentaires. On sait aussi que :

- Parmi les élèves suivant la spécialité mathématiques, il y a 41 % de filles.
- Parmi les élèves suivant l'option mathématiques complémentaires, il y a 62 % de filles.

Enfin, on sait qu'en classe de terminale générale, il y a 55,8 % de filles et 44,2 % de garçons.
On choisit un élève de terminale au hasard parmi l'ensemble des élèves et on considère les événements suivants :

- S : « l'élève suit la spécialité mathématiques »
- C : « l'élève suit l'option mathématiques complémentaires »
- A : « l'élève ne fait pas de mathématiques et c'est bien dommage »
- F : « l'élève est une fille »
- G : « l'élève est un garçon »

1. (a) Traduire toutes les données de l'énoncé en termes de probabilités.
   (b) Calculer $P(A)$ et interpréter le résultat.
   (c) Calculer la probabilité pour que l'élève soit une fille qui suit la spécialité mathématiques.
2. On note p la probabilité pour que l'élève soit une fille sachant qu'il ne fait pas de mathématiques.
   (a) Compléter l'arbre de probabilité suivant :



   (b) Exprimer la probabilité $P(F)$ en fonction de p.
   (c) En déduire la valeur de p.
3. (a) Déterminer la probabilité pour que l'élève ne fasse pas de mathématiques sachant que c'est une fille. *On donnera la valeur arrondie à 10^{-4}.*
   (b) Déterminer la probabilité pour que l'élève ne fasse pas de mathématiques sachant que c'est un garçon. *On donnera la valeur arrondie à 10^{-4}.*

Correction

1. (a) • On sait que 40 % des élèves suivent la spécialité mathématiques et 16 % des élèves suivent l'option mathématiques complémentaires donc :

$$\boxed{P(S) = 0{,}4} \quad \text{et} \quad \boxed{P(C) = 0{,}16}$$

• Parmi les élèves suivant la spécialité mathématiques, il y a 41 % de filles donc :

$$\boxed{P_S(F) = 0{,}41}$$

• Parmi les élèves suivant l'option mathématiques complémentaires, il y a 62 % de filles donc :

$$\boxed{P_C(F) = 0{,}62}$$

• En classe de terminale générale, il y a 55,8 % de filles et 44,2 % de garçons donc :

$$\boxed{P(F) = 0{,}558} \quad \text{et} \quad \boxed{P(G) = 0{,}442}$$

(b) L'élève a trois possibilités incompatibles deux à deux : soit il suit la spécialité mathématiques (S), soit il suit l'option mathématiques complémentaires (C), soit il ne fait pas de mathématiques (A). On a donc :

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(S) - P(C) \\ &= 1 - 0{,}4 - 0{,}16 \\ &= 0{,}44 \end{aligned}$$

La probabilité pour que l'élève ne fasse pas de mathématiques est donc :

$$\boxed{P(A) = 0{,}44}$$

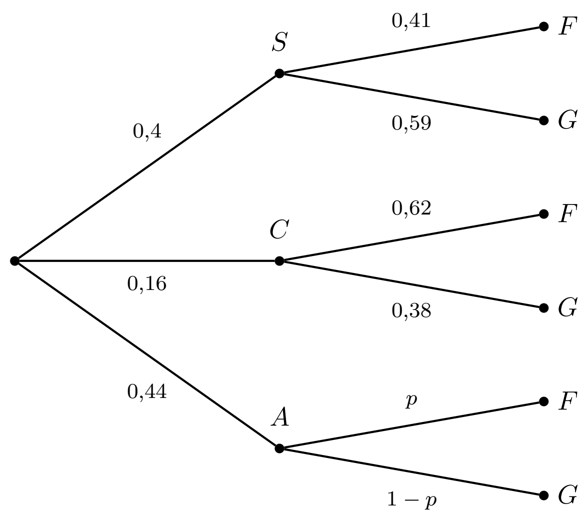
(c) Il s'agit de calculer $P(F \cap S)$:

$$\begin{aligned} P(F \cap S) &= P(S) \times P_S(F) \\ &= 0{,}4 \times 0{,}41 \\ &= 0{,}164 \end{aligned}$$

La probabilité pour que l'élève soit une fille qui suit la spécialité mathématiques est donc :

$$\boxed{P(F \cap S) = 0{,}164}$$

2. (a) On complète l'arbre de la façon suivante :



(b) Les événements S, C et A forment une partition de l'univers donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(S) \times P_S(F) + P(C) \times P_C(F) + P(A) \times P_A(F) \\ &= 0{,}4 \times 0{,}41 + 0{,}16 \times 0{,}62 + 0{,}44 \times p \\ &= 0{,}164 + 0{,}0992 + 0{,}44p \\ &= 0{,}2632 + 0{,}44p \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{P(F) = 0{,}2632 + 0{,}44p}$$

(c) On sait, d'autre part, que $P(F) = 0{,}558$. On en déduit l'égalité :

$$0{,}2632 + 0{,}44p = 0{,}558$$

Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned} 0{,}2632 + 0{,}44p = 0{,}558 &\iff 0{,}44p = 0{,}558 - 0{,}2632 \\ &\iff 0{,}44p = 0{,}2948 \\ &\iff p = \frac{0{,}2948}{0{,}44} \\ &\iff p = 0{,}67 \end{aligned}$$

La probabilité pour que l'élève soit une fille sachant qu'il ne fait pas de mathématiques est donc :

$$\boxed{p = 0{,}67}$$

3. (a) Il s'agit de calculer $P_F(A)$:

$$\begin{aligned} P_F(A) &= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{0{,}44 \times 0{,}67}{0{,}558} \\ &\approx 0{,}5283 \end{aligned}$$

La probabilité pour que l'élève ne fasse pas de mathématiques sachant que c'est une fille est donc :

$$\boxed{P_F(A) \approx 0{,}5283}$$

(b) Il s'agit de calculer $P_G(A)$:

$$\begin{aligned} P_G(A) &= \frac{P(A \cap G)}{P(G)} \\ &= \frac{0{,}44 \times 0{,}33}{0{,}442} \\ &\approx 0{,}3285 \end{aligned}$$

La probabilité pour que l'élève ne fasse pas de mathématiques sachant que c'est un garçon est donc :

$$\boxed{P_G(A) \approx 0{,}3285}$$

Commentaires

➢ Dans cet exercice, la partition de l'univers est constituée de trois événements. L'arbre est donc constitué de trois branches pour la première étape et, dans la formule des probabilités totales, la somme contient trois termes.

➢ Les données de l'énoncé ne permettent pas de compléter toutes les probabilités de l'arbre. Il reste donc deux valeurs inconnues dans l'arbre : p et $1 - p$. C'est en résolvant une équation que l'on va pouvoir déterminer ces valeurs.